

Series de Tiempo Económicas

*Cointegración y el método de corrección
de errores*

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.05.26

Introducción

Motivación (1/2)

Consideremos el *modelo de demanda de dinero*:

$$m_t = \beta_0 + \underset{=1}{\beta_1} p_t + \underset{>0}{\beta_2} y_t + \underset{<0}{\beta_3} r_t + e_t$$

donde:

m_t : Demanda de dinero

p_t : Nivel de precios

y_t : Ingreso real

r_t : Tasa de interés real

e_t : Término de error

La teoría económica sugiere que la demanda de dinero real, m_t , no debería desviarse permanentemente de su trayectoria. ¡Esto implica que el término de error e_t debe ser *estacionario*!

Motivación (2/2)

En el ejemplo anterior, si aplicamos pruebas de raíz unitaria (es decir, un análisis de estacionariedad) a m_t , p_t , y_t y r_t , lo más probable es que todas sean $I(1)$. Entonces:

$$e_t = m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t + \beta_3 r_t$$

Es decir, el término de error e_t , que es estacionario, resulta de una combinación lineal de variables no estacionarias.

Cointegración

Equilibrio de largo plazo

Del ejemplo anterior podemos deducir la definición de **cointegración**.

Primero, diremos que un conjunto de variables económicas se encuentra en *equilibrio de largo plazo* cuando existe una combinación lineal de estas tal que:

$$\begin{aligned}\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k &= \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} \\ &= 0,\end{aligned}$$

Error de equilibrio

Aunque idealmente $\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} = 0$, en la práctica puede ocurrir que:

$$\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} = e_t$$

El término e_t es el **error de equilibrio**. Este puede reflejar *desviaciones transitorias* del punto de equilibrio. Si este es el caso y $e_t \sim I(0)$, decimos que las variables del vector $\mathbf{x}$ tienen una relación *estadística* de largo plazo.

Cointegración (1/2)

Las variables del vector $\mathbf{x}$ están *cointegradas de orden (d, b)* si:

1. Todos sus componentes están integradas de orden d , $x_i \sim I(d)$;
2. Existe un vector $\boldsymbol{\beta}$ tal que la combinación lineal $\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} \sim I(d - b)$ con $b > 0$.

El vector $\boldsymbol{\beta}$ se denomina **vector de cointegración**.

Cointegración (2/2)

Nota

- Si $\mathbf{x}$ tiene k componentes no estacionarios, pueden existir hasta $h < k$ vectores de cointegración linealmente independientes.
- El número h se conoce como **rango de cointegración**.

Ejemplos (1/2)

En nuestro ejemplo de demanda de dinero, un vector de cointegración es:

$$\beta_1 = (1 \quad -\beta_0 \quad -\beta_1 \quad -\beta_2 \quad -\beta_3)$$

Sin embargo, supongamos que existe una regla de política económica (monetaria) tal que:

$$\begin{aligned}\uparrow m_t &\rightarrow \downarrow (p_t + y_t) \\ \downarrow m_t &\rightarrow \uparrow (p_t + y_t)\end{aligned}$$

En este caso, tenemos un segundo vector de cointegración:

$$\beta_2 = (1 \quad -\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad 0)$$

Ejemplos (2/2)

Ejercicio

Considera el siguiente modelo:

$$y_{1,t} = \gamma y_{2,t} + u_{1t}$$

$$y_{2,t} = y_{2,t-1} + u_{2t}$$

$$u_{it} \sim WN(0, \sigma_i^2); \quad i = 1, 2$$

$$\text{Cov}(u_{it}, u_{it-h}) = 0$$

$$\text{Cov}(u_{it}, u_{jt}) = 0$$

Muestra que $y_{1,t}$ y $y_{2,t}$ están cointegradas. ¿Cuál es el vector de cointegración, β ?

Modelo de corrección de errores (ECM)

Modelo de corrección de errores (1/3)

Considera un *modelo de la estructura temporal de las tasas de interés*:

$$\Delta r_{s,t} = \alpha_s (r_{s,t-1} - \beta r_{l,t-1}) + \sum_{i=1}^p \gamma_{si} \Delta r_{s,t-i} + \sum_{i=1}^p \delta_{si} \Delta r_{l,t-i} + u_{s,t},$$
$$\Delta r_{l,t} = \alpha_l (r_{s,t-1} - \beta r_{l,t-1}) + \sum_{i=1}^p \gamma_{li} \Delta r_{s,t-i} + \sum_{i=1}^p \delta_{li} \Delta r_{l,t-i} + u_{l,t}.$$

Si las tasas son $I(1)$ y los términos de error son ruidos blancos (posiblemente correlacionados), los términos entre paréntesis deben ser estacionarios. Estos términos representan el error de equilibrio.

Modelo de corrección de errores (2/3)

El modelo anterior nos permite analizar cómo se corrigen los *desequilibrios de corto plazo* en las tasas de interés. Este es un ejemplo de **modelo de corrección de errores (ECM)**.

Nota

Para que el modelo de corrección de errores exista, es necesario que las variables $r_{s,t}$ y $r_{l,t}$ estén cointegradas. En el ejemplo estas están cointegradas de orden $(1, 1)$ y el vector de cointegración es $\begin{pmatrix} 1 & -\beta \end{pmatrix}$.

Modelo de corrección de errores (3/3)

Nota que no existe corrección de errores si:

- las variables no están cointegradas, o
- $\alpha_s = \alpha_l = 0$.

En tal caso, el modelo se reduce a un VAR para las primeras diferencias de $\mathbf{r}_{s,t}$ y $\mathbf{r}_{l,t}$. Esto es, un VAR para $\Delta \mathbf{r}_{s,t}$ y $\Delta \mathbf{r}_{l,t}$.

Procedimiento de Engle-Granger

Procedimiento de Engle–Granger

Consideremos dos variables, y_t y z_t , posiblemente $I(1)$. El procedimiento de Engle y Granger consta de cuatro pasos.

Paso 1

Confirmar el orden de integración de y_t y z_t :

- Si las dos variables son efectivamente $I(1)$ continuamos al paso 2.
- Si las dos variables están integradas de diferente orden, podemos concluir que no están cointegradas.
- Si las dos variables son $I(0)$ (estacionarias) ajustamos a cada una de ellas un modelo del tipo ARMA.

Paso 2

Estimar la relación de largo plazo entre y_t y z_t :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t.$$

Para que exista cointegración, es necesario que el término u_t sea estacionario. Para esto, y dado que u_t es desconocido, aplicamos una prueba de Dickey-Fuller (aumentada) al término:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

Nota. En la prueba de DF, usamos las **tablas de Engle-Granger** en lugar de las de DF.

Paso 3

Si y_t y z_t están cointegradas, el ECM (como un VAR restringido):

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \alpha_1 + \alpha_y (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1}) + \sum_{i=1}^p a_{1,1}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p a_{1,2}(i) \Delta z_{t-i} + \varepsilon_{y,t} \\ \Delta z_t &= \alpha_2 + \alpha_z (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1}) + \sum_{i=1}^p a_{2,1}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p a_{2,2}(i) \Delta z_{t-i} + \varepsilon_{z,t}\end{aligned}$$

Engle-Granger sugieren sustituir $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1}$ por $\hat{e}_{t-1}$ obtenido en el paso 2.

Paso 4

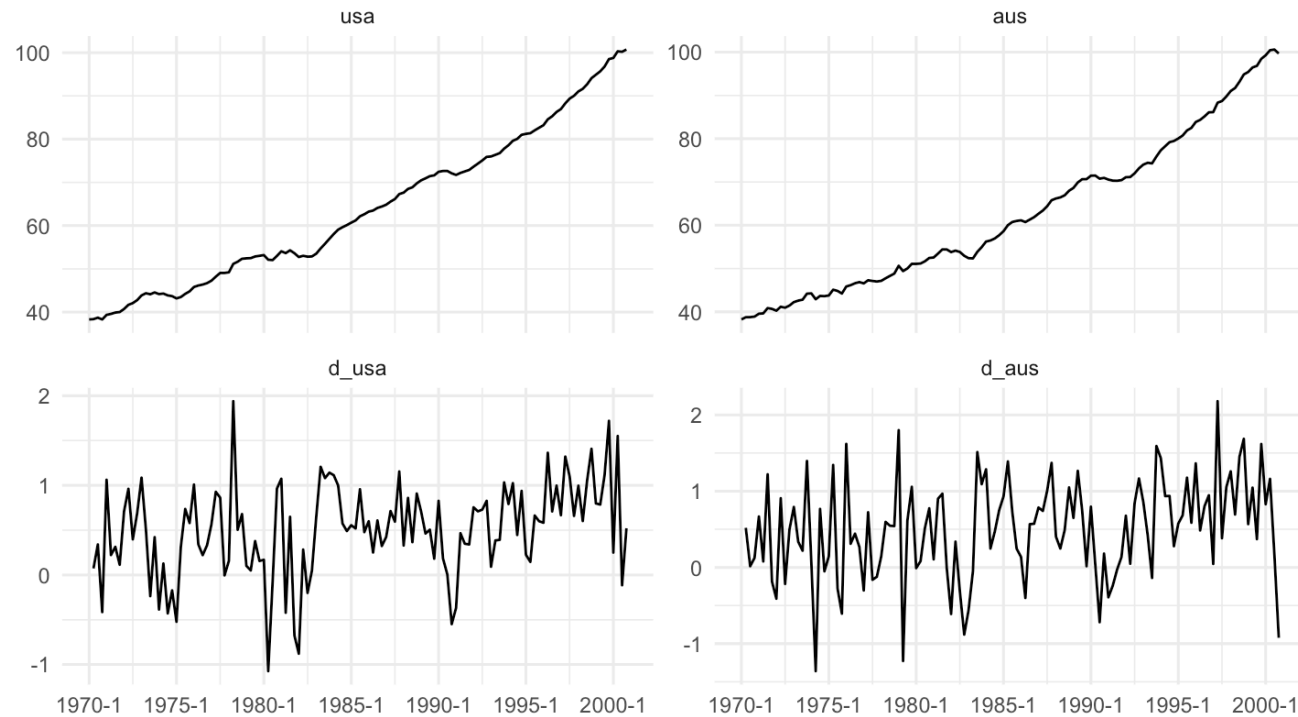
Revisamos si el modelo es adecuado:

- Revisamos si los residuales del modelo son ruidos blancos.
- Revisamos la estimación de las velocidades de ajuste. Si estos son estadísticamente iguales a cero, concluimos que no existe un ECM.
- Si el ECM es válido, podemos calcular las funciones de impulso-respuesta y descomposición de la varianza para analizar el comportamiento del modelo.

Ejemplo (1/9)

Consideremos al Producto Interno Bruto de Estados Unidos (USA) y de Australia (AUS).

PIB real USA y Australia: niveles y primeras diferencias



Ejemplo (2/9)

El primer paso del procedimiento de Engle-Granger consiste en confirmar el orden de integración de ambas series. Una prueba de Dickey-Fuller (para un modelo con tendencia y un rezago) indica que la serie $USA \sim I(1)$:

```
##  
## #####  
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #  
## #####  
##  
## The value of the test statistic is: -8.0085 32.0712
```

```
##      1pct  5pct 10pct  
## tau2 -3.46 -2.88 -2.57  
## phi1  6.52  4.63  3.81
```

Ejemplo (3/9)

De igual forma, una prueba de Dickey-Fuller (para un modelo con tendencia y un rezago). indica que la serie $AUS \sim I(1)$:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -9.4353 44.5326
```

```
##      1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.46 -2.88 -2.57
## phi1  6.52  4.63  3.81
```


Ejemplo (4/9)

El segundo paso del procedimiento de Engle-Granger comienza estimando la relación de largo plazo entre las series USA y AUS. Aquí estimamos la siguiente relación:

$$aus_t = \beta_0 + \beta_1 usa_t + u_t$$

```
##  
## Call:  
## lm(formula = aus ~ usa, data = usaus)  
##  
## Residuals:  
##      Min       1Q   Median       3Q      Max   
## -2.47448 -0.92582 -0.08206  1.01575  2.65821   
##  
## Coefficients:  
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)      
## (Intercept)  -1.0724     0.4032  -2.659  0.00888 **     
## usa          1.0010     0.0061 164.090 < 2e-16 ***   
## ---  
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1  
##  
## Residual standard error: 1.19 on 122 degrees of freedom  
## Multiple R-squared:  0.9955, Adjusted R-squared:  0.9955   
## F-statistic: 2.693e+04 on 1 and 122 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ejemplo (5/9)

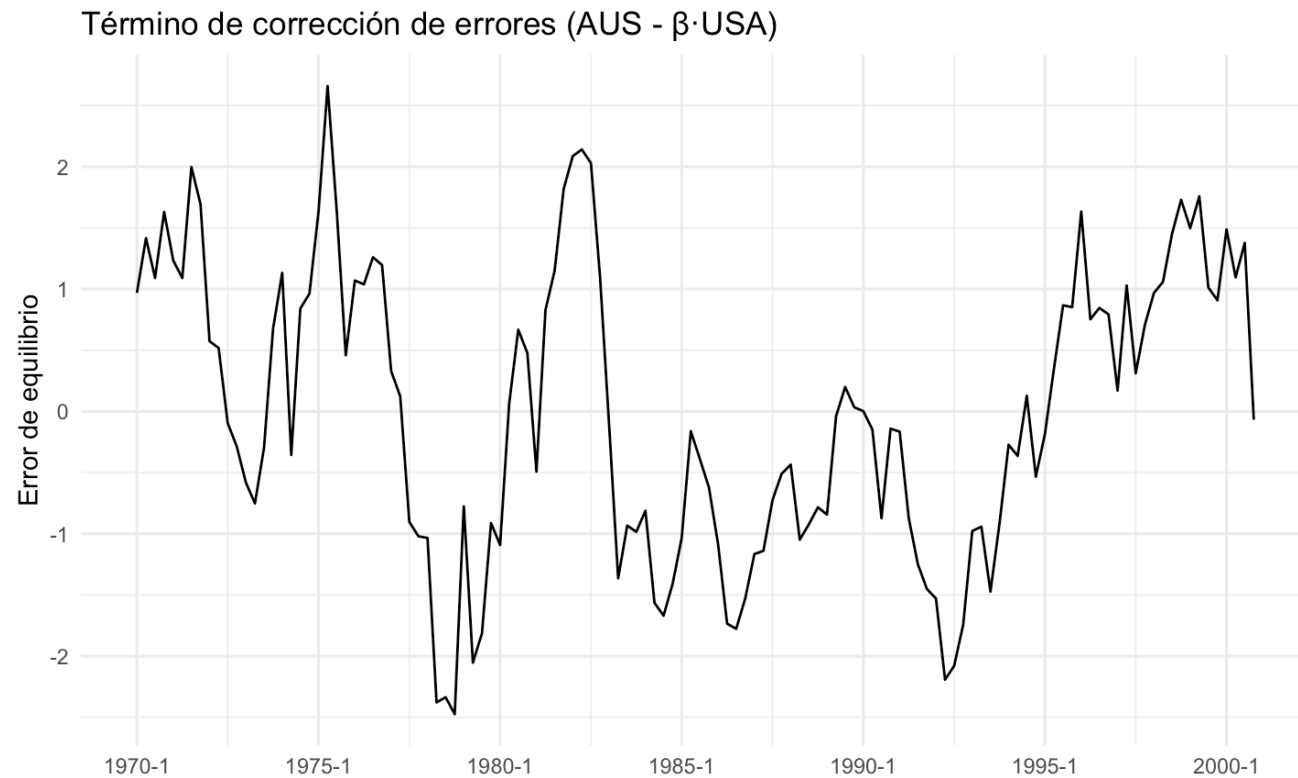
En el Paso 2 del procedimiento de Engle-Granger, tenemos que recuperar el residual de la relación entre las series USA y AUS.

$$e_t = aus_t - b_0 - b_1 usa_t$$

donde b_0 y b_1 son los estimadores de MCO. Para que las series USA y AUS estén cointegradas, es necesario que este residual se comporte como un ruido blanco (esto es, una serie estacionaria: $e_t \sim I(0)$).

Ejemplo (6/9)

Graficamos el término de corrección de errores, e_t . ¿Parece un ruido blanco?



Ejemplo (7/9)

Una prueba de Dickey-Fuller aumentada aplicada a e_t , indica que este es, de hecho, estacionario:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -3.0511
```

```
##      1pct  5pct 10pct
## tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

Ejemplo (8/9)

Finalmente, dado que las series USA y AUS parecen estar cointegradas, estimamos el modelo de corrección de errores. Este es el Paso 3 del procedimiento de Engle-Granger. Para la serie AUS tenemos:

```
##  
## Call:  
## lm(formula = d_aus ~ 1 + ehat_l1, data = usaus_ecm)  
##  
## Residuals:  
##      Min       1Q   Median       3Q      Max   
## -1.8348 -0.4084  0.0011  0.3905  1.7042   
##  
## Coefficients:  
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)      
## (Intercept)  0.49963    0.05688   8.784 1.25e-14 ***  
## ehat_l1      -0.13862    0.04798  -2.889  0.00458 **   
## ---  
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1  
##  
## Residual standard error: 0.6308 on 121 degrees of freedom  
## Multiple R-squared:  0.06453,    Adjusted R-squared:  0.0568   
## F-statistic: 8.347 on 1 and 121 DF,  p-value: 0.004578
```

Ejemplo (9/9)

El modelo de corrección de errores para USA es:

```
##  
## Call:  
## lm(formula = d_usa ~ 1 + ehat_l1, data = usaus_ecm)  
##  
## Residuals:  
##      Min       1Q   Median       3Q      Max   
## -1.58073 -0.28634  0.01296  0.33653  1.43244   
##  
## Coefficients:  
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)      
## (Intercept) 0.5074786  0.0466973   10.87  <2e-16 ***  
## ehat_l1      0.0004075  0.0393911    0.01   0.992      
## ---  
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1  
##  
## Residual standard error: 0.5179 on 121 degrees of freedom  
## Multiple R-squared:  8.845e-07, Adjusted R-squared:  -0.008264   
## F-statistic: 0.000107 on 1 and 121 DF,  p-value: 0.9918
```

Modelo de corrección de errores vectorial (VECM)

Modelo de corrección de errores vectorial (VECM)

El modelo de corrección de errores permite describir el ajuste de *una variable* ante desviaciones del equilibrio de largo plazo. Sin embargo, este enfoque tiene dos limitaciones importantes:

1. Solo permite un vector de cointegración.
2. Modela el ajuste ecuación por ecuación, no como un sistema.

En contextos multivariados, especialmente cuando varias variables interactúan simultáneamente, es natural permitir que *todas* respondan a los desequilibrios de largo plazo. El modelo que permite hacerlo es el **Modelo de Corrección de Errores Vectorial (VECM)**.

Del VAR al VECM

Consideremos un modelo VAR(p) para un vector $k \times 1$ de variables y_t :

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim WN(0, \Sigma).$$

Restando y_{t-1} de ambos lados y reordenando términos, obtenemos:

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t,$$

donde:

$$\Pi = -(I - A_1 - A_2 - \cdots - A_p),$$

y las matrices Γ_i recogen la dinámica de corto plazo.

Cointegración y la matriz Π (1/2)

La relación anterior se conoce como la **forma VECM del VAR**. La matriz Π contiene toda la información relevante sobre el *largo plazo* del sistema. Dependiendo de su rango, pueden darse tres casos:

- Si $\text{rank}(\Pi) = 0$, no existe cointegración y el modelo se reduce a un VAR en primeras diferencias.
- Si $\text{rank}(\Pi) = k$, todas las variables son estacionarias en niveles.
- Si $0 < \text{rank}(\Pi) = r < k$, existen r **relaciones de cointegración**.

Cointegración y la matriz Π (2/2)

Cuando existen r relaciones de cointegración, la matriz Π puede factorizarse como:

$$\Pi = \alpha\beta',$$

donde: β es una matriz $k \times r$ cuyos vectores columna son los *vectores de cointegración*, y α es una matriz $k \times r$ que contiene las *velocidades de ajuste* de cada variable ante desviaciones del equilibrio.

Interpretación del VECM

Cada ecuación del VECM contiene dos componentes fundamentales:

1. **Dinámica de corto plazo**, capturada por las primeras diferencias y las matrices Γ_i .
2. **Corrección de errores**, capturada por el término $\alpha\beta' y_{t-1}$, que mide cómo las variables reaccionan ante desequilibrios de largo plazo.

Aunque todas las ecuaciones comparten las mismas relaciones de equilibrio β , cada variable puede ajustarse de manera distinta, dependiendo de los coeficientes de α .

Relación entre ECM y VECM

Nota

El modelo de corrección de errores univariado (ECM) es un caso particular del VECM.

- Cuando $k = 2$ y $r = 1$, el VECM se reduce a un sistema con un solo término de corrección de errores.
- Al estimar una sola ecuación de ese sistema, se obtiene el ECM de Engle–Granger.

En este sentido, el VECM generaliza el enfoque de Engle–Granger a sistemas multivariados.

Estimación del VECM: método de Johansen

El VECM se estima habitualmente mediante el **método de Johansen**, el cual:

- se basa en máxima verosimilitud,
- permite determinar el rango de cointegración r ,
- estima simultáneamente las matrices α y β ,
- es válido para sistemas con más de dos variables.

El método utiliza dos pruebas estadísticas para determinar r :

- la **prueba de la traza** (*trace test*), y
- la **prueba del máximo eigenvalor** (*maximum eigenvalue test*).

Ambas contrastan la hipótesis nula de que el número de vectores de cointegración es menor o igual a un valor dado.

Ejemplo VECM (1/5)

Consideremos nuevamente el ejemplo del PIB real de Estados Unidos y Australia.

Dado que ambas series parecen ser $I(1)$ y el procedimiento de Engle–Granger sugiere cointegración, podemos estimar un VECM mediante el método de Johansen.

Ejemplo VECM (2/5)

La prueba de la traza permite determinar el número de relaciones de cointegración.

```
##
## #####
## # Johansen-Procedure #
## #####
##
## Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration
##
## Eigenvalues (lambda):
## [1] 2.614149e-01 7.108068e-02 4.440892e-16
##
## Values of teststatistic and critical values of test:
##
##          test 10pct  5pct  1pct
## r <= 1 |   9.00   7.52   9.24 12.97
## r = 0  |  45.96 17.85 19.96 24.60
##
## Eigenvectors, normalised to first column:
## (These are the cointegration relations)
##
##          usa.l2    aus.l2  constant
## usa.l2    1.0000000  1.0000000  1.000000
## aus.l2   -0.8151535 -0.9897382 -1.610538
## constant -2.9079884 -1.8150309 39.642121
##
## Weights W:
## (This is the loading matrix)
##
##          usa.l2    aus.l2    constant
## usa.d  0.03925578 -0.05228363 -8.065548e-17
## aus.d  0.04252620  0.08997669  3.382537e-16
```


Ejemplo VECM (3/5)

Los vectores de cointegración estimados por Johansen son:

```
## Response usa.d :
##
## Call:
## lm(formula = usa.d ~ ect1 + usa.dl1 + aus.dl1 - 1, data = data.mat)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.44688 -0.25550  0.00058  0.35454  1.59321
##
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## ect1    0.039256   0.006865   5.719 8.13e-08 ***
## usa.dl1 0.241588   0.096944   2.492  0.0141 *
## aus.dl1 0.006636   0.080499   0.082  0.9344
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.4855 on 119 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5625, Adjusted R-squared:  0.5515
## F-statistic: 51.01 on 3 and 119 DF,  p-value: < 2.2e-16
##
##
## Response aus.d :
##
## Call:
## lm(formula = aus.d ~ ect1 + usa.dl1 + aus.dl1 - 1, data = data.mat)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.53604 -0.39022 -0.04166  0.40008  1.42633
##
```

Ejemplo VECM (4/5)

Interpretación:

- El VECM incorpora simultáneamente: 1) la dinámica de corto plazo, y 2) el equilibrio de largo plazo.
- El término de corrección de errores indica cómo reaccionan USA y AUS ante desviaciones del equilibrio.
- Una vez estimado el VECM, es posible calcular funciones de impulso–respuesta, descomposición de la varianza, etc.