

Series de Tiempo Económicas

Modelos de volatilidad

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.04.27

Introducción

Hechos estilizados (1/3)

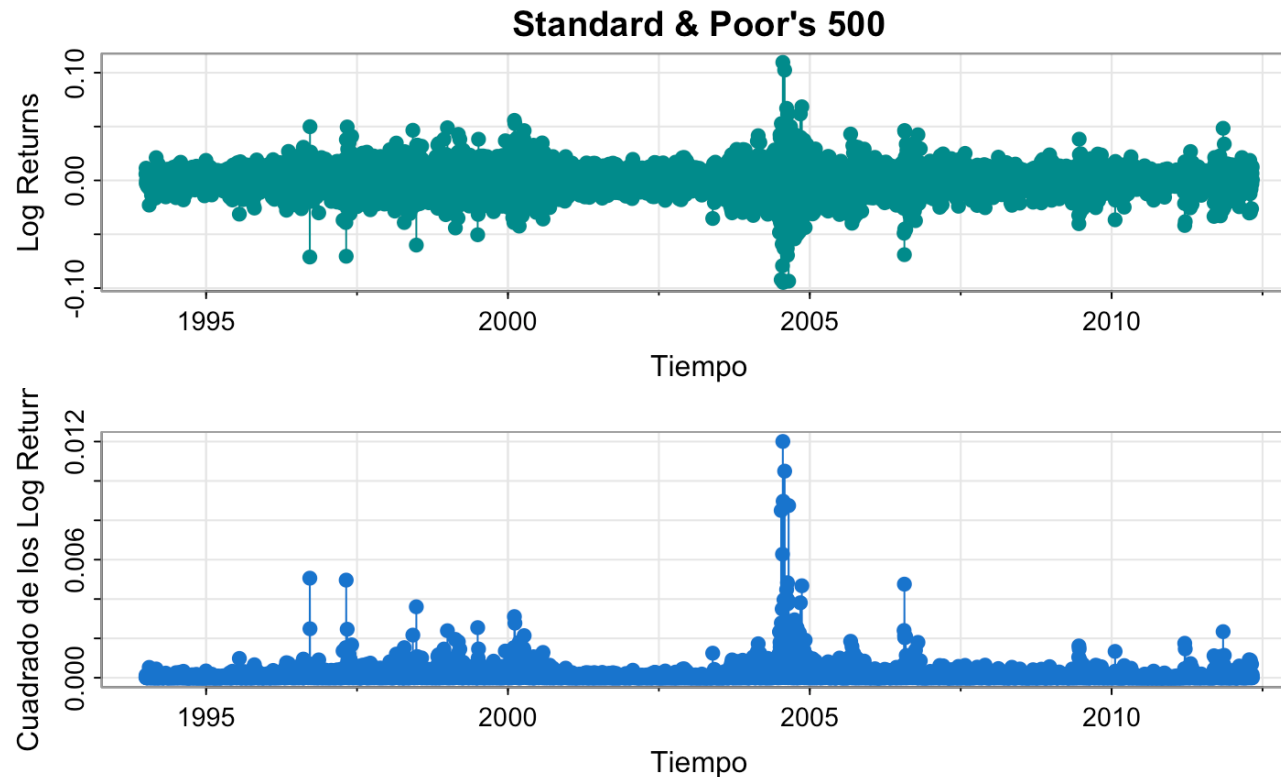
Antes, hemos supuesto que la varianza de los errores, σ^2 , era constante. Sin embargo, las series de tiempo económicas y financieras a menudo violan este supuesto.

Existen dos hechos estilizados clave que motivan la necesidad de modelos de volatilidad.

Hechos estilizados (2/3)

Agrupamiento de Volatilidad (Volatility Clustering)

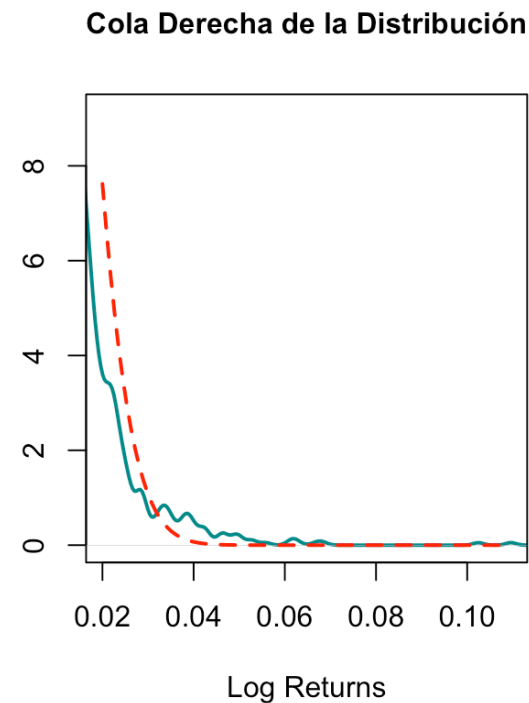
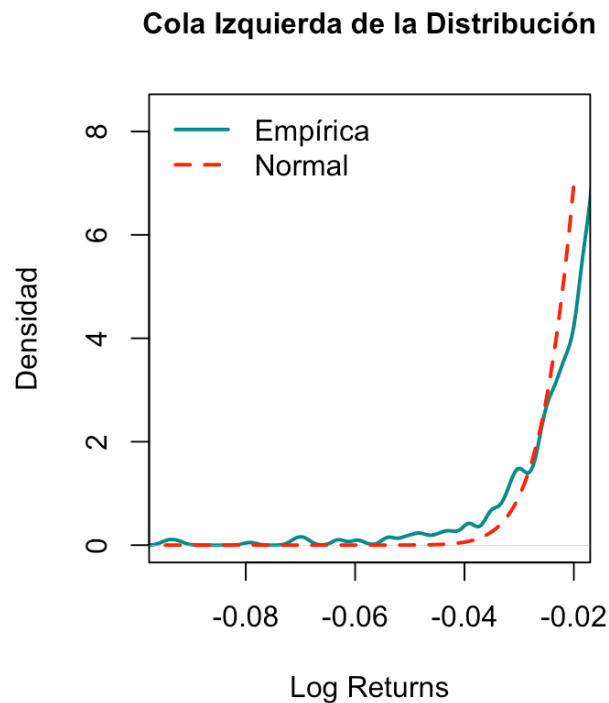
Muchas series financieras exhiben períodos de calma seguidos de períodos de alta turbulencia. Los periodos de alta (baja) turbulencia tienden a agruparse.



Hechos estilizados (3/3)

Colas Pesadas (Leptokurtosis)

Las distribuciones de los rendimientos financieros suelen tener colas más pesadas que una distribución normal: los eventos extremos (grandes caídas o subidas) ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría bajo normalidad.



Heteroscedasticidad condicional

Estos hechos estilizados sugieren que la varianza, *aunque puede ser constante en el largo plazo (no condicional), varía en el corto plazo dependiendo de la información disponible*. Esto es la **heteroscedasticidad condicional**

Modelos ARCH

Modelos ARCH (1/4)

Sea $\mathbf{y}_t$ una serie de tiempo. Esta puede seguir, por ejemplo, un proceso ARMA($\mathbf{p}, \mathbf{q}$) que puede incluir algunas variables explicativas adicionales (que por sí mismas podrían ser series de tiempo):

$$y_t = \phi_0 + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_t + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Modelos ARCH (2/4)

A diferencia de lo que hemos hecho antes, supondremos ahora que:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + \omega_t$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0; i = 1, \dots, m$$

$$\omega_t \sim WN(0, \lambda^2)$$

Modelos ARCH (3/4)

El supuesto anterior implica que:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-m}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

Es decir, aunque la varianza no condicional de ε_t sigue siendo constante (igual a σ^2), *la varianza condicional no lo es*. Cuando esto ocurre tenemos que:

$$\varepsilon_t \sim \text{ARCH}(m)$$

Modelos ARCH (4/4)

Nota

Para que el proceso que sigue ε_t *sea estacionario*, es necesario que las raíces del polinomio:

$$1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \cdots - \alpha_m L^m = 0$$

se encuentren *fuera del círculo unitario*. Si todos los α_i son no-negativos, esto es equivalente a:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m < 1$$

Además, en este caso, es fácil demostrar que:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i}\end{aligned}$$

Interpretación de los parámetros en ARCH(m)

Los coeficientes α_i actúan como *pesos* que determinan cuánto influyen los choques pasados en la volatilidad actual.

- Si los α_i son grandes, la respuesta de la varianza condicional a los choques es *persistente*.
- Si los α_i son pequeños, los efectos de los choques pasados se disipan rápidamente.

En un ARCH(1), la persistencia se mide directamente con el valor de α_1 .

Fórmula alternativa de un ARCH(m) (1/2)

Una forma alternativa de escribir un ARCH(m) consiste en suponer que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= v_t \sqrt{h_t} \\ v_t &\sim iid(0, 1)\end{aligned}$$

Donde:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

Es fácil demostrar que, en este caso:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-m}) = h_t$$

Fórmula alternativa de un ARCH(m) (2/2)

Si combinamos ambas formas de escribir un modelo ARCH(m) podemos encontrar las *condiciones para que λ_t exista*. Por ejemplo, para un ARCH(**1**):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- Una condición necesaria para que λ_t exista es que :

$$0 \leq \alpha_1 < 1$$

- Además, si hacemos el supuesto adicional que $v_t \sim \square(0, 1)$, podemos obtener que, para que exista un cuarto momento finito (y, por tanto, kurtosis finita):

$$\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$$

Propiedades de los modelos ARCH: Volatility clustering

Consideremos un ARCH(1):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Nota que:

- Si α_1 es grande (cercano a 1), un choque grande en ε_{t-1} aumenta h_t de manera persistente.
- Esto produce el **agrupamiento de volatilidad** observado en los datos financieros.
- Los períodos de alta (baja) varianza tienden a ser seguidos por otros de alta (baja) varianza.

Propiedades de los modelos ARCH: leptokurtosis (1/2)

Nota que, aun si $v_t \sim N(0, 1)$, los errores ε_t de un modelo ARCH presentan *colas más pesadas* que la normal:

$$\text{Kurt}(\varepsilon_t) = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 3 \quad \text{si } \alpha_1^2 < \frac{1}{3}.$$

Entonces:

- Los valores grandes de $|\varepsilon_t|$ ocurren con mayor frecuencia de la esperada bajo normalidad.
- Esto se debe a que h_t cambia en el tiempo: los periodos con varianza alta generan choques más grandes.

Nota. La leptocurtosis en los modelos ARCH surge *endógenamente* debido a la variabilidad de h_t . No es necesario suponer una distribución no normal de los errores para obtener colas pesadas.

Propiedades de los modelos ARCH: leptokurtosis (2/2)

Ejercicio

Muestra que, para un ARCH(1) con $v_t \sim N(0, 1)$:

$$\text{Kurt}(\varepsilon_t) = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 3.$$

Efectos ARCH

Antes de aplicar pruebas formales, puede observarse la heteroscedasticidad condicional de manera gráfica. Para esto:

1. Estimamos el modelo y recuperamos sus residuales: e_t .
2. Examinamos su correlograma de e_t^2 . Si se observan patrones de agrupamiento o autocorrelaciones significativas, tenemos evidencia de efectos ARCH.

Prueba para los efectos ARCH

Prueba ARCH-LM de Engle (1982). Supongamos que tenemos un modelo ARMA con variables explicativas.

1. Estimamos el modelo y recuperamos sus residuales: e_t .
2. Estimamos el siguiente modelo:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m e_{t-m}^2 + u_t$$

3. Utilizamos el estadístico TR^2 para probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

$$H_1 : \text{Al menos un } \alpha_i \neq 0$$

$$TR^2 \sim \chi_m^2$$

Nota. Dado que un modelo ARCH(m) puede interpretarse como un modelo AR(m) aplicado a los residuales al cuadrado, el correlograma de e_t^2 también ayuda a identificar el valor de m .

Estimación de un modelo con efectos ARCH (1/2)

Los modelos con efectos ARCH se estiman por el *método de máxima verosimilitud*.

Cuando $v_t \sim iid \square(0, 1)$, no es difícil demostrar que:

$$f(y_t | \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2h_t} (y_t - \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_t)^2 \right\}$$

donde:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (y_{t-1} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_{t-1})^2 + \alpha_2 (y_{t-2} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_{t-2})^2 + \cdots + \alpha_m (y_{t-m} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_{t-m})^2 \end{aligned}$$

Estimación de un modelo con efectos ARCH (2/2)

Entonces, la función de verosimilitud de un ARCH(m) bajo el supuesto de normalidad es:

$$\ln(\theta) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \beta \mathbf{x}_t)^2}{h_t}$$

Nota. Naturalmente, la normalidad de $\mathbf{v}_t$ puede relajarse. Ver, por ejemplo, Hamilton (1992).

Pronósticos en modelos ARCH (1/4)

Considera un modelo ARCH(1):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim iid(0, 1)$$

Deseamos calcular:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \mathbb{E}(h_{T+s} \mid \Omega_T)$$

Este pronóstico puede obtenerse mediante iteración.

Pronósticos en modelos ARCH (2/4)

No es difícil encontrar que:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2; & s = 1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 h_{T+s-1}; & s > 1 \end{cases}$$

Esto implica que:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \alpha_0 \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_1^j + \alpha_1^s \varepsilon_T^2.$$

Pronósticos en modelos ARCH (3/4)

Nota que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{h}_{T+s|T} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} = \sigma^2$$

Esto es:

- Conforme crece h , el pronóstico converge a la varianza no condicional.
- Cuanto mayor sea α_1 , más lentamente se alcanza la convergencia.
- Si α_1 es cercano a 1 , los choques afectan la volatilidad por más tiempo.

Pronósticos en modelos ARCH (4/4)

Ejercicio

Muestra que, para un modelo ARCH(1):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim iid(0, 1),$$

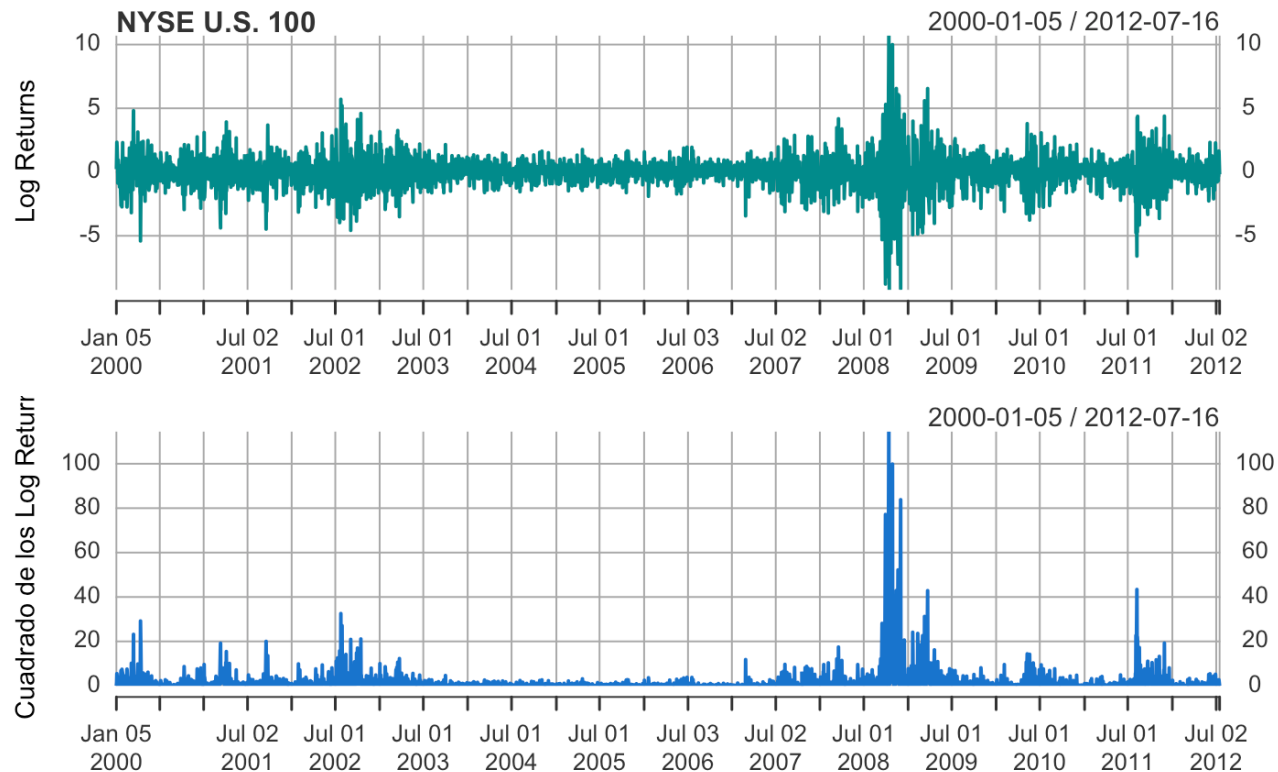
tenemos que:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \alpha_0 \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_1^j + \alpha_1^s h_T.$$

Pista. Usa la ley de las expectativas iteradas y que $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = h_t$.

Ejemplo ARCH: NYSE (1/3)

Considera la tasa de rendimiento diario de la NYSE U.S. 100 del 4 de enero del 2000 al 16 de julio del 2012:



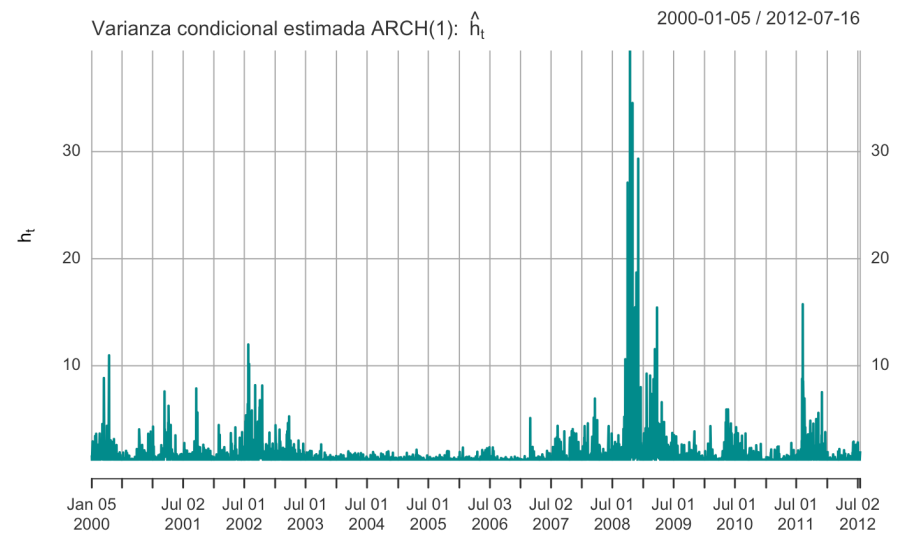
Ejemplo ARCH: NYSE (2/3)

Ajustamos el siguiente modelo:

$$y_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

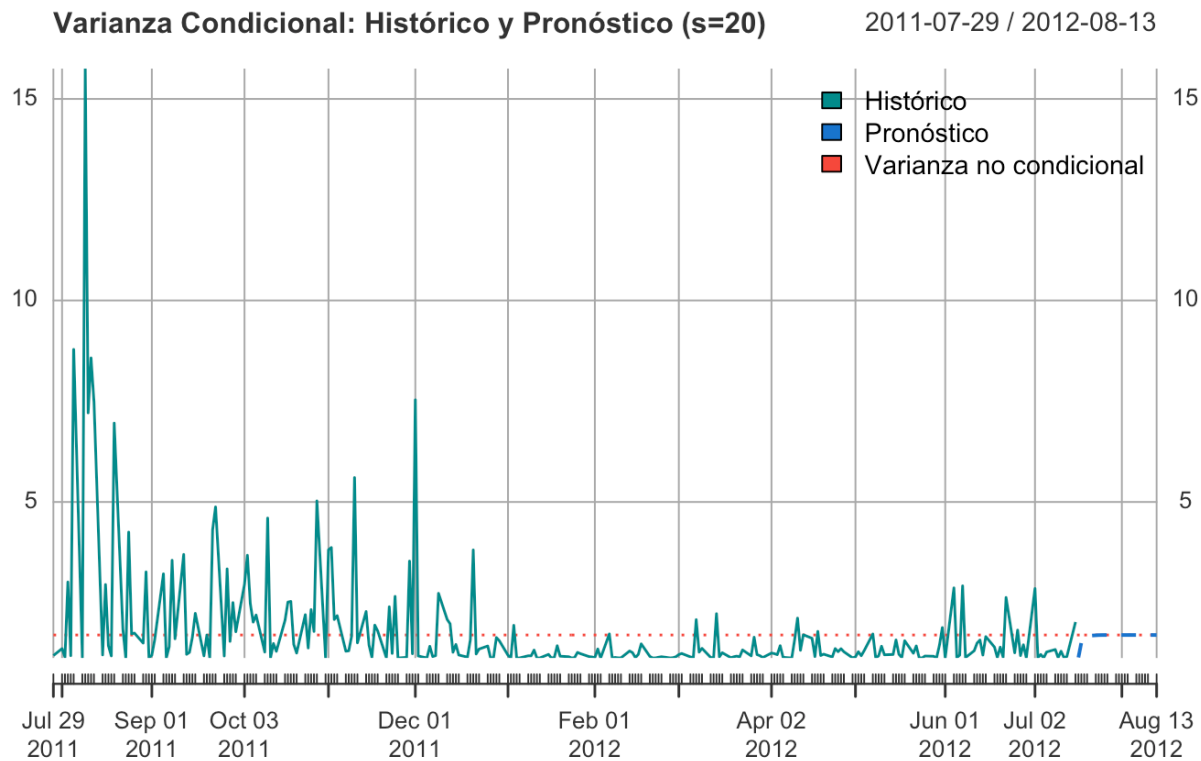
$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$



Ejemplo ARCH: NYSE (3/3)

Finalmente, un pronóstico de h_t para $s = 20$ periodos hacia adelante resulta en:



Modelos GARCH

Modelos GARCH (1/5)

Imaginemos ahora que:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$
$$v_t \sim iid(0, 1)$$

Pero ahora:

$$h_t = \alpha_0 + \Pi(L)\varepsilon_t^2$$
$$\Pi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j L^j$$

Modelos GARCH (2/5)

Para parametrizar el polinomio $\Pi(L)$, podemos suponer que:

$$\begin{aligned}\Pi(L) &= \frac{\alpha(L)}{1 - \delta(L)} \\ &= \frac{\alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_m L^m}{1 - \delta_1 L - \delta_2 L^2 - \cdots - \delta_r L^r}\end{aligned}$$

donde, por ahora, supondremos que las raíces del polinomio $1 - \delta(L) = 0$ se encuentran fuera del círculo unitario.

Se puede demostrar que esto implica que:

$$\begin{aligned}h_t &= \kappa + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \cdots + \delta_r h_{t-r} \\ &\quad + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2\end{aligned}$$

con $\kappa = (1 - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_r)\alpha_0$.

Modelos GARCH (3/5)

El resultado es un modelo **ARCH generalizado** (Bollerslev, 1986), GARCH(r, m):

$$\varepsilon_t \sim \text{GARCH}(r, m)$$

Modelos GARCH (4/5)

Nota que:

$$\begin{aligned} h_t + \varepsilon_t^2 &= \kappa - \delta_1(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}) - \delta_2(\varepsilon_{t-2}^2 - h_{t-2}) - \cdots - \delta_r(\varepsilon_{t-r}^2 - h_{t-r}) \\ &\quad + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \delta_r \varepsilon_{t-r}^2 \\ &\quad + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + \varepsilon_t^2 \end{aligned}$$

O:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^p (\delta_i + \alpha_i) \varepsilon_{t-i}^2 + \omega_t \\ &\quad - \sum_{j=1}^r \delta_j \omega_{t-j}, \end{aligned}$$

donde $\omega_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ es un **ruido blanco condicionalmente heteroscedástico** y $p = \max(m, r)$. Esto es, *si* $\varepsilon_t \sim GARCH(r, m)$, entonces $\varepsilon_t^2 \sim ARMA(p, r)$.

Modelos GARCH (5/5)

Si suponemos que $\kappa > 0$, $\alpha_i \geq 0$ y $\delta_j \geq 0$, entonces, de nuestro análisis de los modelos ARMA, podemos deducir que un modelo GARCH($\mathbf{r}, \mathbf{m}$) es estacionario si todas las raíces del polinomio:

$$1 - (\delta_1 + \alpha_1)L - (\delta_2 + \alpha_2)L^2 - \cdots - (\delta_p + \alpha_p)L^p = 0$$

se encuentran fuera del círculo unitario. Dado la no-negatividad de los coeficientes, la condición de estacionariedad se simplifica a:

$$(\delta_1 + \alpha_1) + (\delta_2 + \alpha_2) + \cdots + (\delta_p + \alpha_p) < 1.$$

Además, en este caso, se puede demostrar que:

$$\sigma^2 = \frac{\kappa}{1 - \sum_{i=1}^p (\delta_i + \alpha_i)}$$

Propiedades de los modelos GARCH: Volatility clustering

Consideremos un GARCH(1, 1):

$$h_t = \kappa + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1}, \quad \kappa > 0, \alpha_1, \delta_1 \geq 0.$$

Observa que:

- Un choque grande en ε_{t-1} incrementa h_t .
- Si $\alpha_1 + \delta_1$ es grande (cercano a 1), este efecto persiste durante varios periodos.
- Los periodos de alta (baja) volatilidad tienden a ser seguidos por otros similares. Esto es el *agrupamiento de volatilidad (volatility clustering)*.

Nota. El término $\delta_1 h_{t-1}$ extiende la memoria de la volatilidad sin aumentar el número de rezagos del modelo.

Propiedades de los modelos GARCH: leptokurtosis (1/2)

Al igual que en los modelos ARCH, aun si $\mathbf{v}_t \sim N(0, 1)$, los errores $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ de un modelo GARCH presentan *colas más pesadas* que una distribución normal.

Por ejemplo, para un GARCH(1, 1):

$$\text{Kurt}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = 3 \frac{1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^2}.$$

Entonces:

- Los valores grandes de $|\boldsymbol{\varepsilon}_t|$ son más frecuentes que bajo normalidad.
- La leptocurtosis surge endógenamente de la variabilidad de h_t .
- Cuanto mayor sea $\alpha_1 + \delta_1$, más persistentes y pesadas serán las colas. La leptokurtosis disminuye a medida que este término se aleja de 1.

Propiedades de los modelos GARCH: leptokurtosis (2/2)

Ejercicio

Muestra que, para un GARCH(1, 1) con $v_t \sim N(0, 1)$:

$$\text{Kurt}(\varepsilon_t) = 3 \frac{1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^2} > 3.$$

Efectos GARCH

Antes de aplicar pruebas formales, puede observarse la heteroscedasticidad condicional de manera gráfica o residual:

1. Estimamos el modelo de media (por ejemplo, un ARMA) y recuperamos sus residuales: e_t .
2. Examinamos el correlograma de e_t^2 . Si este muestra autocorrelaciones significativas o patrones de agrupamiento, esto sugiere efectos GARCH.

Nota. Dado que un modelo GARCH(r, m) implica un ARMA(p, r) en los cuadrados de los errores, el correlograma de e_t^2 proporciona información sobre el orden del modelo.

Prueba para los efectos ARCH/GARCH

Prueba ARCH-LM de Engle (1982). Supongamos que tenemos un modelo ARMA con variables explicativas.

1. Estimamos el modelo y recuperamos sus residuales: e_t .
2. Estimamos el siguiente modelo:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m e_{t-m}^2 + u_t$$

3. Utilizamos el estadístico TR^2 para probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

$$H_1 : \text{Al menos un } \alpha_i \neq 0$$

$$TR^2 \sim \chi_m^2$$

Nota. La prueba ARCH-LM contrasta la presencia de heteroscedasticidad condicional, sin distinguir entre estructuras ARCH o GARCH.

Estimación de un modelo GARCH (1/2)

Los modelos GARCH se estiman por *máxima verosimilitud*.

Cuando $v_t \sim iid \square(0, 1)$, no es difícil demostrar que:

$$f(y_t | \mathbf{x}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2h_t} (y_t - \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}_t)^2 \right\}$$

donde:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \cdots + \delta_r h_{t-r}$$

Estimación de un modelo GARCH (2/2)

Entonces, la función de verosimilitud de un GARCH(r, m) bajo el supuesto de normalidad es:

$$\ln(\theta) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \beta \mathbf{x}_t)^2}{h_t}$$

Notas.

- Las primeras observaciones de h_t se fijan como constantes (por ejemplo, $h_1 = \text{Var}(y_t)$).
- En la práctica, los modelos GARCH suelen estimarse asumiendo $v_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, aunque se pueden usar distribuciones alternativas para capturar colas más pesadas (por ejemplo, una t de Student).

Pronósticos en modelos GARCH (1/4)

Considera un modelo GARCH(1, 1):

$$h_t = \kappa + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1}$$
$$\kappa > 0, \alpha_1, \delta_1 \geq 0$$

Igual que en el caso de los ARCH, deseamos calcular:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \mathbb{E}(h_{T+s} \mid \Omega_T)$$

Pronósticos en modelos GARCH (2/4)

No es difícil encontrar que:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \delta_1 h_T; & s = 1 \\ \alpha_0 + (\alpha_1 + \delta_1) \hat{h}_{T+s-1|T}; & s > 1 \end{cases}$$

Esto implica que:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \sigma^2 + (\alpha_1 + \delta_1)^{s-1} (\hat{h}_{T+1|T} - \sigma^2)$$

Pronósticos en modelos GARCH (3/4)

Nota que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{h}_{T+s|T} = \frac{\kappa}{1 - \alpha_1 - \delta_1} = \sigma^2$$

Ahora:

- El término $\alpha_1 + \delta_1$ determina la persistencia de la volatilidad.
- Si $\alpha_1 + \delta_1$ es cercano a 1 , los choques se disipan lentamente.
- A largo plazo, $\hat{h}_{T+s|T}$ converge a la varianza no condicional σ^2 .

Pronósticos en modelos GARCH (4/4)

Ejercicio

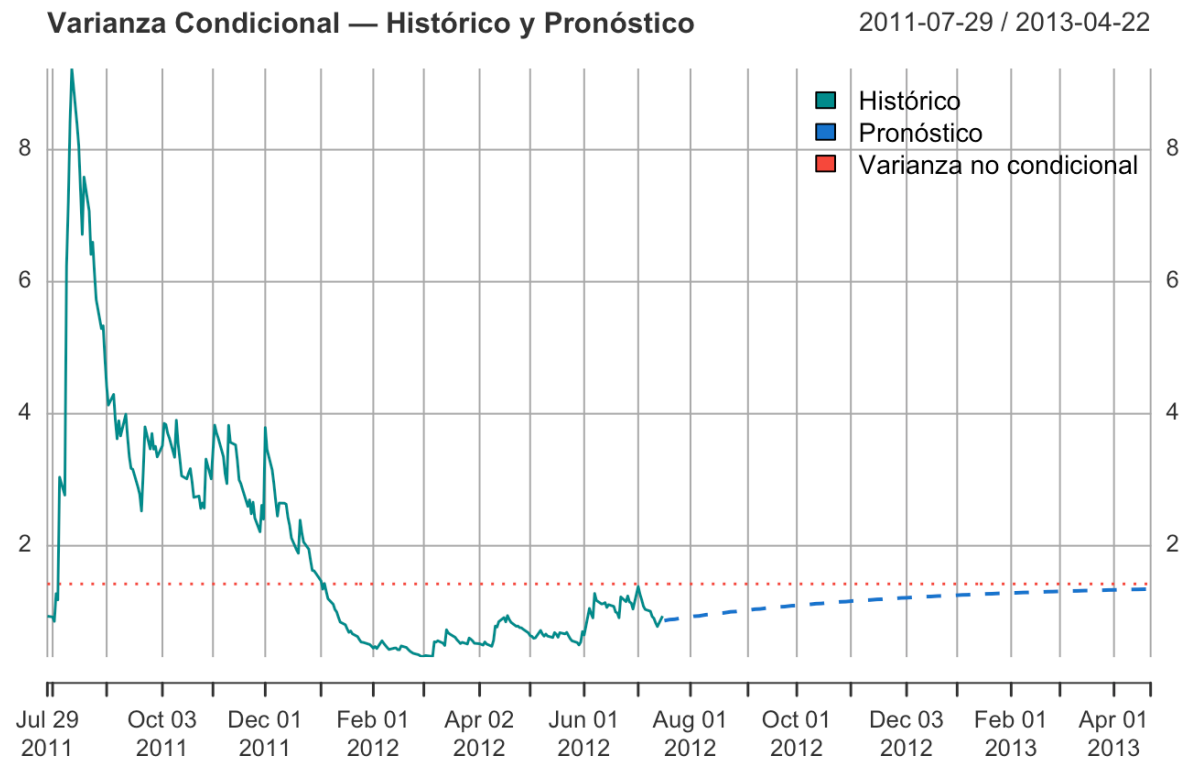
Muestra que, para un modelo GARCH(1, 1):

$$\hat{h}_{T+s|T} = \sigma^2 + (\alpha_1 + \delta_1)^s (h_T - \sigma^2),$$

Pista. Usa la ley de las expectativas iteradas y que $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = h_t$.

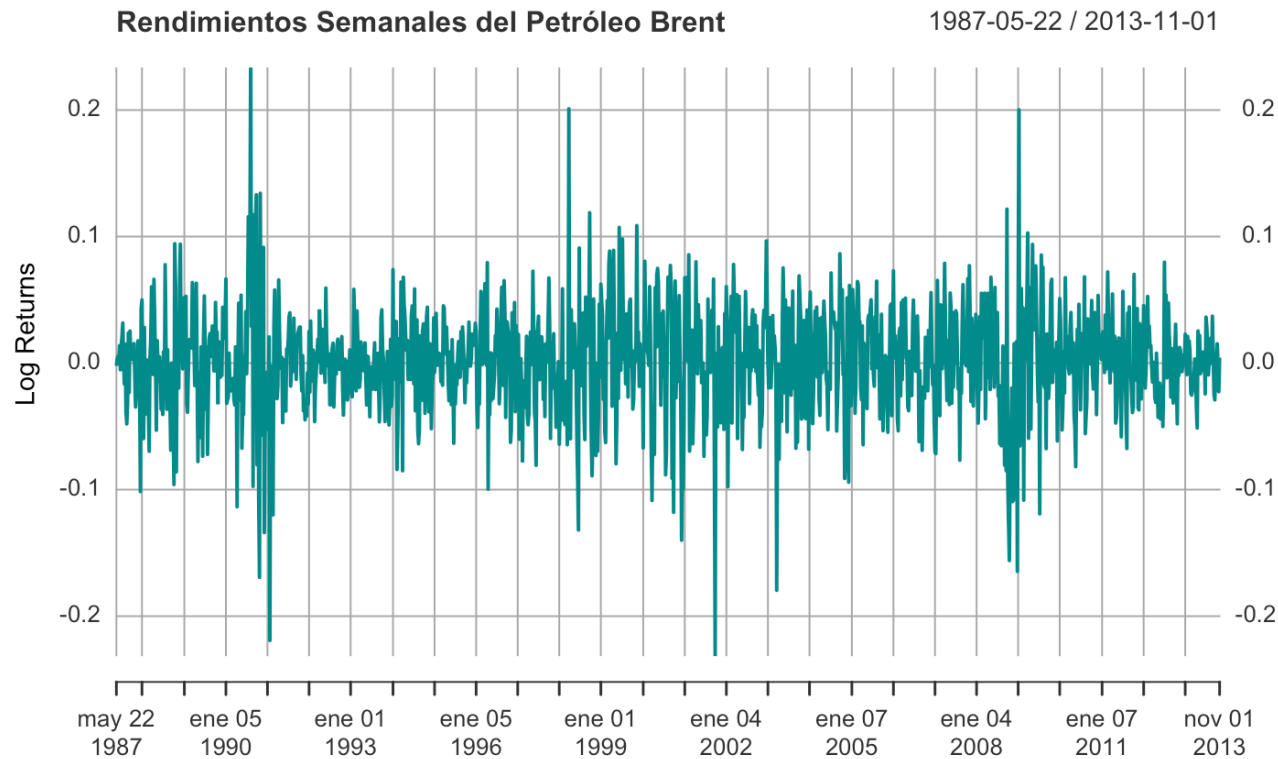
Ejemplo GARCH: NYSE

Considera la tasa de rendimiento diario de la NYSE U.S. 100 del 4 de enero del 2000 al 16 de julio del 2012. Si ahora estimamos un GARCH(1, 1):



Ejemplo GARCH: Brent (1/3)

Considera el rendimiento del precio spot semanal del Brent (15/may/1987–1/nov/2013).



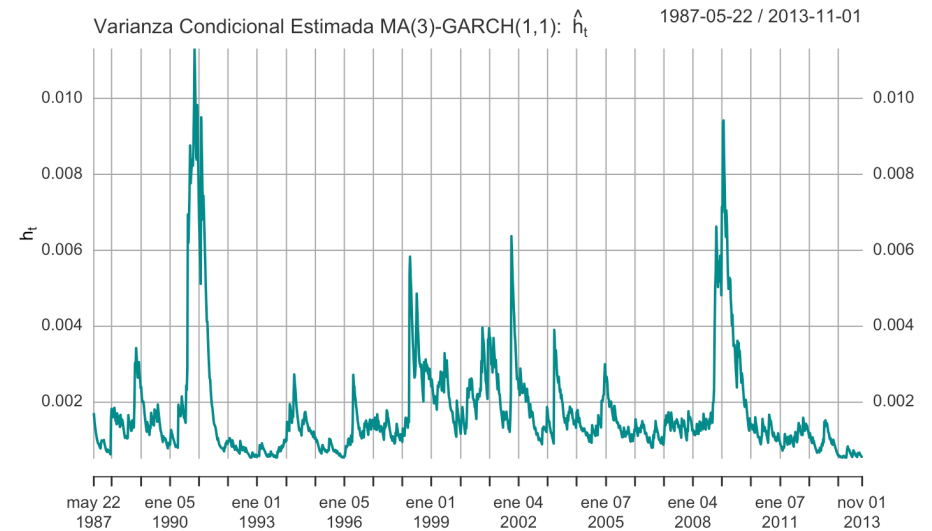
Ejemplo GARCH: Brent (2/3)

Ajustamos el siguiente modelo:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$



Ejemplo GARCH: Brent (3/3)

Finalmente, un pronóstico de h_t para $s = 200$ periodos hacia adelante resulta en:

