

Series de Tiempo Económicas

*Medidas de dependencia serial y
estacionariedad*

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2025.08.24

Dependencia serial

Introducción

Antes de modelar una serie de tiempo, es necesario describir su comportamiento. Para esto calculamos:

1. La función promedio.
2. La función de autocovarianza.
3. La función de autocorrelación.

Veremos en qué consisten estas funciones y algunos ejemplos.

Función promedio

La **función promedio** se define como:

$$\mu_{y_t} = \mathbb{E}(y_t)$$

donde y_t es una serie de tiempo en el momento $t, t = 1, \dots, T$.

Función promedio: Ejemplos (1/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$y_t = \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2)$$

En este caso:

$$\begin{aligned}\mu_{y_t} &= \mathbb{E}(y_t) \\ &= \frac{1}{3} [\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1})] \\ &= 0\end{aligned}$$

Función promedio: Ejemplos (2/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$\begin{aligned}y_t &= \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t; \quad y_0 = 0 \\&= \delta t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \\ \varepsilon_t &\sim iid \square(0, \sigma^2)\end{aligned}$$

En este caso:

$$\mu_{y_t} = \delta t$$

Función de autocovarianza

La **función de autocovarianza** se define como:

$$\gamma_y(t, \tau) = E[(y_t - \mu_t)(y_\tau - \mu_\tau)]$$

donde y_t es alguna serie de tiempo en el momento t . Nota que si $\tau = t$:

$$\begin{aligned}\gamma(t, t) &= E[(y_t - \mu_t)^2] \\ &= \text{Var}(y_t)\end{aligned}$$

Función de autocovarianza: Ejemplos (1/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$y_t = \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square (0, \sigma^2)$$

En este caso:

$$\gamma_y(t, \tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$$

Función de autocovarianza: Ejemplos (2/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$y_t = \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2)$$

En este caso:

$$\gamma_y(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sigma^2 & \text{si } |t - \tau| = 0 \\ \frac{2}{9}\sigma^2 & \text{si } |t - \tau| = 1 \\ \frac{1}{9}\sigma^2 & \text{si } |t - \tau| = 2 \\ 0 & \text{si } |t - \tau| > 2 \end{cases}$$

Función de autocorrelación (1/2)

La **función de autocorrelación** se define como:

$$\rho(t, \tau) = \frac{\gamma_y(t, \tau)}{\sqrt{\gamma_y(t, t)\gamma_y(\tau, \tau)}}$$

donde y_t es una serie de tiempo en el momento t .

Función de autocorrelación (2/2)

Nota que la función de autocorrelación se simplifica cuando la varianza de $\mathbf{y}_t$ es constante. Esto es, si $\gamma_y(t, t) = \gamma_y(\tau, \tau)$, entonces:

$$\rho(t, \tau) = \frac{\gamma_y(t, \tau)}{\gamma_y(t, t)}$$

Si además $t = \tau$:

$$\rho(t, \tau) = 1$$

Función de autocorrelación: Ejemplos (1/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$\begin{aligned}y_t &= \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim iid \square(0, \sigma^2)\end{aligned}$$

En este caso:

$$\rho_y(t, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$$

Función de autocorrelación: Ejemplos (2/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$y_t = \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2)$$

En este caso:

$$\rho_y(t, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t - \tau| = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } |t - \tau| = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } |t - \tau| = 2 \\ 0 & \text{si } |t - \tau| > 2 \end{cases}$$

Otras medidas de dependencia serial

Otras medidas de dependencia serial son:

- La **función de covarianza cruzada**:

$$\gamma_{xy}(t, \tau) = E[(x_t - \mu_{x_t})(y_\tau - \mu_{y_\tau})]$$

- La **función de correlación cruzada**:

$$\rho_{xy}(t, \tau) = \frac{\gamma_{xy}(t, \tau)}{\sqrt{\gamma_x(t, t)\gamma_y(\tau, \tau)}}$$

Estacionariedad

Estacionariedad

El concepto de **estacionariedad** (débil) es importante para modelar una serie de tiempo. Una serie y_t es estacionaria si:

1. Su media es constante:

$$\mu_{y_t} = \mu_y$$

2. Su función de autocovarianza no depende de t o τ , sino de $h = t - \tau$:

$$\gamma_y(t + k, \tau + k) = \gamma_y(t, \tau); \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo de estacionariedad (1/4)

Considera un ruido blanco:

$$y_t = \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2)$$

Este proceso es estacionario puesto que:

$$E(y_t) = 0$$
$$\gamma_y(t, \tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = \tau \text{ (} h = 0 \text{)} \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \text{ (} h \neq 0 \text{)} \end{cases}$$

Ejemplo de estacionariedad (2/4)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$y_t = \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2)$$

Este proceso es estacionario puesto que:

$$E(y_t) = 0$$
$$\gamma_y(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ \frac{2}{9}\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ \frac{1}{9}\sigma^2 & \text{si } |h| = 2 \\ 0 & \text{si } |h| > 2 \end{cases}$$

Ejemplo de estacionariedad (3/4)

Considera un proceso autorregresivo de orden 1:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2)$$

Este proceso es estacionario si $|\phi| < 1$, ya que:

$$E(y_t) = 0$$
$$\gamma_y(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}; & |h| = 0 \\ \phi \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}; & |h| = 1 \\ \phi^2 \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}; & |h| = 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Ejemplo de estacionariedad (4/4)

Considera una caminata aleatoria:

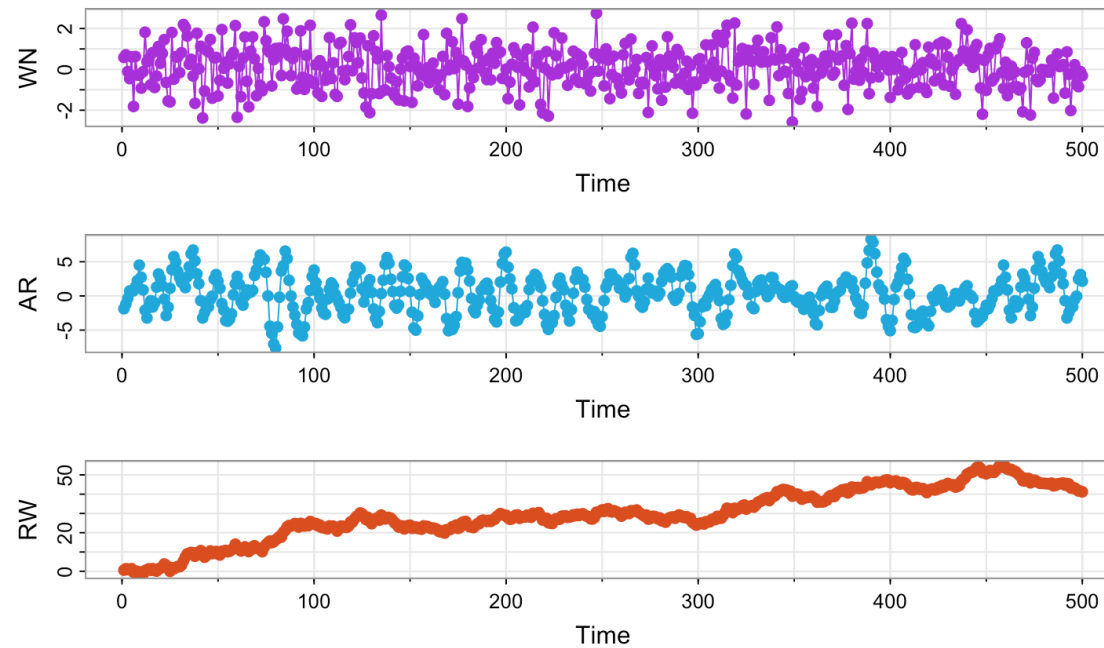
$$\begin{aligned}y_t &= \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t; \quad y_0 = 0; \quad \varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2) \\ &= \delta t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j\end{aligned}$$

En este caso, ambas condiciones para la estacionariedad se violan, puesto que:

$$\begin{aligned}\mu_{y_t} &= \delta t \\ \gamma_y(t, \tau) &= \sigma^2 \min(t, \tau)\end{aligned}$$

Estacionario vs. No estacionario

¿Cuál(es) de estos procesos es (son) estacionario(s)?



Estacionariedad: Función promedio y autocovarianza

De los resultados anteriores, es fácil deducir que, para un proceso estacionario:

1. La función promedio:

$$\begin{aligned}\mu_y &= \mathbb{E}(y_t) \\ &= \mu\end{aligned}$$

2. La función de autocovarianza solo depende del desfase $h = t - \tau$:

$$\begin{aligned}\gamma_y(t, \tau) &= \gamma_y(t, t - h) \\ &= \gamma_y(h, 0) \\ &= \gamma_y(h) \\ &= \gamma_y(-h)\end{aligned}$$

Descomposición de Wold (1/2)

La siguiente es la **descomposición de Wold**:

Cualquier serie estacionaria y_t puede reescribirse como una combinación lineal de ruidos blancos:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty; \quad \psi_0 = 1$$
$$\varepsilon_t \sim iid \square(0, \sigma^2).$$

Descomposición de Wold (2/2)

Entonces, si y_t es una serie estacionaria:

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu.$$

Y:

$$\gamma_y(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}.$$

Dependencia serial: estimación

Dependencia serial: estimación (1/3)

El cálculo de las funciones promedio, autocovarianza y autocorrelación depende de nuestro conocimiento de los parámetros del modelo y del ruido blanco.

Si y_t es una serie de tiempo **ergódica**, podemos usar las observaciones $y_1, y_2, \dots, y_T$ para estimar:

1. Promedio muestral:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

2. Autocovarianzas muestrales:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (y_t - \hat{\mu})(y_{t+h} - \hat{\mu}).$$

Dependencia serial: estimación (2/3)

3. Autocorrelaciones muestrales:

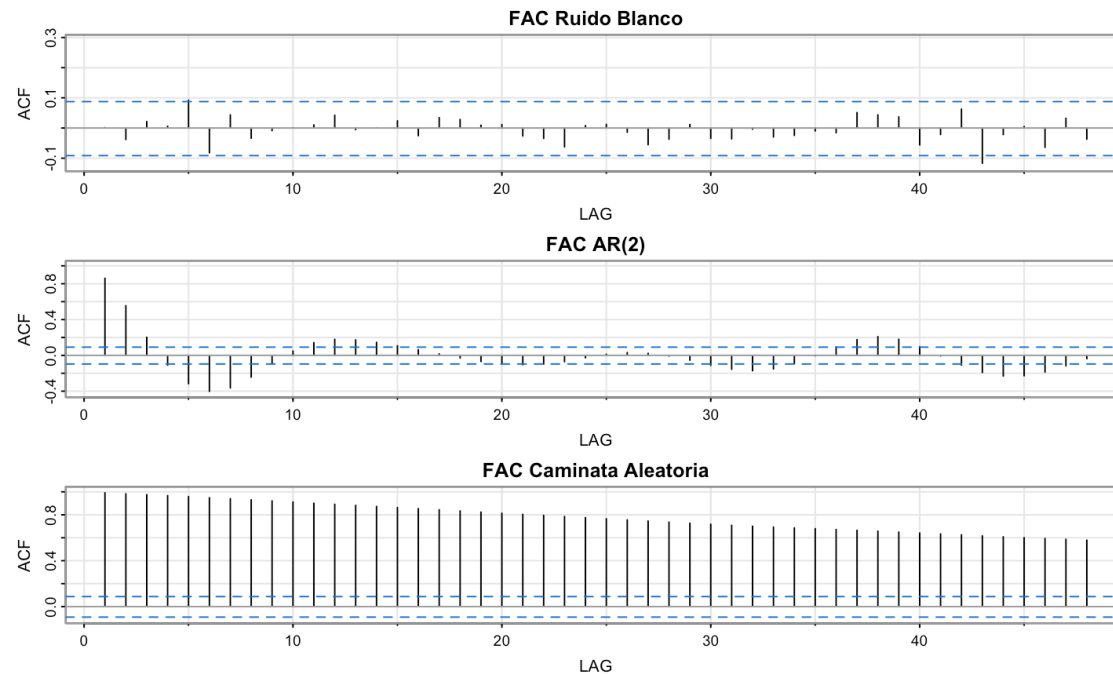
$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Se puede demostrar que si la serie $\mathbf{y}_t$ es un ruido blanco, entonces para T grande y bajo ciertas condiciones, la función de autocorrelación muestral se distribuye aproximadamente como:

$$\hat{\rho}(h) \sim \square \left(0, \frac{1}{T} \right).$$

Dependencia serial: estimación (3/3)

El **correlograma** es la representación gráfica de la función de autocorrelación muestral, incluyendo intervalos de confianza.



Otras medidas de dependencia serial (1/2)

Autocovarianza y autocorrelación cruzadas:

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \hat{\mu}_x)(y_{t+h} - \hat{\mu}_y).$$

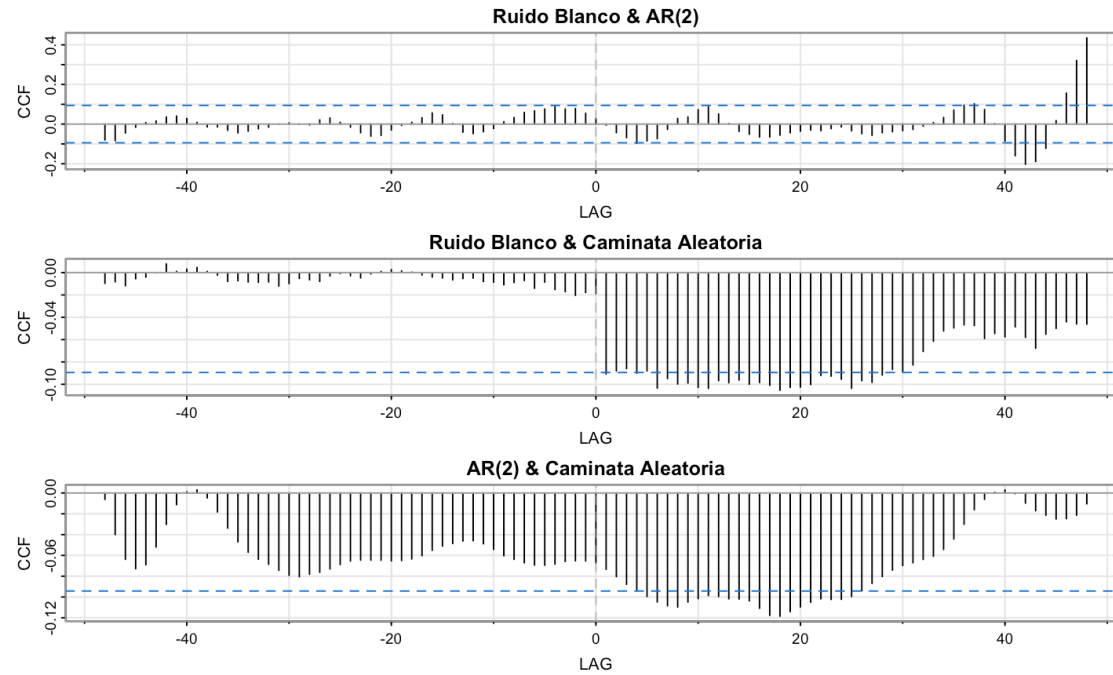
$$\hat{\rho}_{xy}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_x(0)\hat{\gamma}_y(0)}}.$$

Se puede demostrar que si las series $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{y}_t$ son independientes, entonces para T grande:

$$\hat{\rho}_{xy}(h) \sim \square \left(0, \frac{1}{T} \right).$$

Otras medidas de dependencia serial (2/2)

Algunos ejemplos:



Estacionariedad estricta y ergodicidad

Estacionariedad estricta

El concepto de estacionariedad que hemos estudiado corresponde al de estacionariedad débil o estacionariedad en covarianza. Sin embargo, también existe el concepto de **estacionariedad estricta** o fuerte.

Una serie de tiempo, y_t es estacionaria fuerte si:

$$f_{Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots}(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots) = f_{Y_{t+h}, Y_{t+h+1}, Y_{t+h+2}, \dots}(y_{t+h}, y_{t+h+1}, y_{t+h+2}, \dots)$$

Usualmente, *estacionariedad débil* no implica estacionariedad fuerte y viceversa.

Ergodicidad (1/2)

En general, tenemos que la serie de tiempo $y_t, t = 1, 2, \dots, T$ es **ergódica en la media** si:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t = \mathbb{E}(y_t) \\ = \mu$$

Se puede demostrar que una *condición necesaria* para la ergodicidad es que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_y(j)| < \infty.$$

Además, esta *condición es suficiente* si $y_t \sim iid \square(\cdot)$.

Ergodicidad (2/2)

De igual forma, tenemos que la serie de tiempo $y_t, t = 1, 2, \dots, T$ es **ergódica en la covarianza** si:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (y_t - \mu)(y_{t+h} - \mu) = \gamma_y(h)$$

Se puede demostrar que, si $y_t \sim iid(\cdot)$, una serie de tiempo es ergódica en covarianza si es ergódica en su media.