

Econometría II

*Estimación por el método de máxima
verosimilitud*

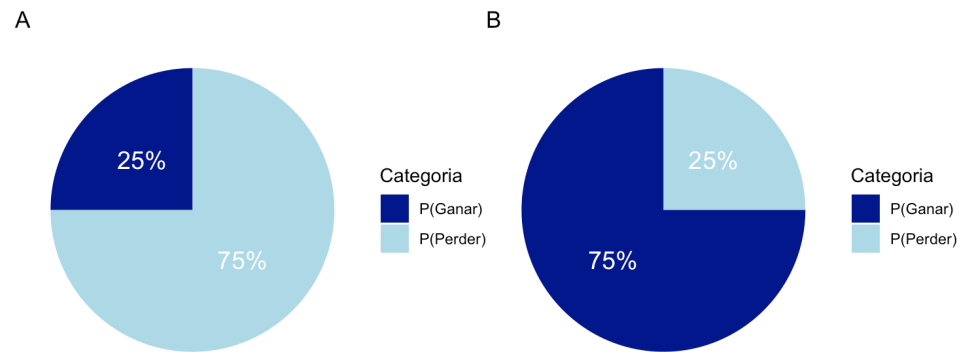
Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2024.12.18

Ejemplo con una distribución Bernoulli

Ejemplo con una distribución Bernoulli (1/5)

Supongamos que existen dos ruletas como sigue:



Despues de girar una ruleta tres veces obtienes la secuencia: Gana-Gana-Pierde. ¿Puedes adivinar que ruleta giraste?

Ejemplo con una distribución Bernoulli (2/5)

Sea p la probabilidad de ganar. Para el ejemplo anterior tenemos:

$$p = \begin{cases} 0.25 & \text{si ruleta A} \\ 0.75 & \text{si ruleta B} \end{cases}$$

Entonces, la probabilidad de obtener la combinación Gana-Gana-Pierde es:

$$p_{Gana-Gana-Pierde} = \begin{cases} 0.0469 & \text{si ruleta A} \\ 0.1406 & \text{si ruleta B} \end{cases}$$

Ejemplo con una distribución Bernoulli (3/5)

Concluimos que es más probable que hayas girado la ruleta B y que el mejor estimador de p para la combinación Gana-Gana-Pierde es:

$$\hat{p} = 0.75$$

Este es el **estimador de máxima verosimilitud** para este ejemplo.

Ejemplo con una distribución Bernoulli (4/5)

Ahora supongamos que p puede tomar cualquier valor (entre cero y uno). Si observaste la secuencia Gana-Gana-Pierde, ¿Cuál es el valor de p más probable? Nota que la probabilidad de obtener esta secuencia se calcula como:

$$L(p) = p \times p \times (1 - p) = p^2 - p^3$$

La función $L(p)$ es la función de verosimilitud para este ejemplo. Esta depende del valor desconocido, p .

Ejemplo con una distribución Bernoulli (4/4)

Deducimos que el valor de p más probable es aquel que maximiza la función de verosimilitud:

$$p = \arg \max_p L(p)$$

Entonces es fácil encontrar que:

$$\hat{p} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo con una distribución normal

Distribución normal, 2 observaciones (1/5)

Ahora supongamos que dos observaciones independientes, $x_1 = 4$ y $x_2 = 6$, provienen de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Recordemos que la función de densidad de una normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

Como en el ejemplo anterior, primero supongamos que $\mu = 3.5$ y $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de observar los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = 6$?

Distribución normal, 2 observaciones (2/5)

Ejercicio

Muestra que si $\mu = 3.5$ y $\sigma^2 = 1$ la probabilidad de obtener $x_1 = 4$ y $x_2 = 6$ es:

$$f_{x_1, x_2}(x_1 = 4, x_2 = 6) = 0.0062$$

Muestra, además, que si $\mu = 4$ y $\sigma^2 = 1$:

$$f_{x_1, x_2}(x_1 = 4, x_2 = 6) = 0.0215$$

Claramente, si tuviéramos que elegir un estimador de μ entre ambas distribuciones, elegiríamos:

$$\hat{\mu} = 0.4$$

Distribución normal, 2 observaciones (3/5)

Supongamos ahora que $\sigma^2 = 1$, pero que μ puede tomar cualquier valor. En este caso, la función de verosimilitud sería:

$$L(\mu) = f(x_1)f(x_2) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(4-\mu)^2} \right] \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(6-\mu)^2} \right]$$

El procedimiento es el mismo de antes, aunque la función es un poco más complicada de derivar.

Distribución normal, 2 observaciones (4/5)

Nota. En la práctica se simplifican los cálculos considerando, en lugar de la función de verosimilitud, a su logaritmo (¿Por qué?):

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \{\log L(\mu)\}$$

Esta se conoce como **función de log-verosimilitud**.

Distribución normal, 2 observaciones (5/5)

Ejercicio

Muestra que el estimador de máxima verosimilitud en nuestro ejemplo es:

$$\hat{\mu} = 5$$

Distribución normal, n observaciones (1/3)

¿Que pasa si tenemos n observaciones (y $\sigma^2 = 1$)? En este caso, la función de verosimilitud es:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^2}$$

Distribución normal, n observaciones (2/3)

Ejercicio

Calcula la función de log-verosimilitud cuando n datos independientes provienen de una distribución normal con $\sigma^2 = 1$. Calcula luego el estimador de máxima verosimilitud de μ .

Comenta.

Distribución normal, n observaciones (3/3)

Ejercicio

Calcula la función de verosimilitud y log-verosimilitud para n datos independientes que provienen de una distribución normal con parámetros μ y σ^2 desconocidos. Calcula los estimadores de máxima verosimilitud.

Aplicación: el modelo de regresión simple

Estimación del modelo de regresión simple por MV (1/3)

Considera el siguiente modelo de regresión simple:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

$$u_i \sim \square(0, \sigma^2)$$

con $i = 1, \dots, n$. Nota que la función de densidad del término de error, u , es:

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\beta_1-\beta_2x}{\sigma}\right)^2} \end{aligned}$$

Estimación del modelo de regresión simple por MV (2/3)

Dado que tenemos n observaciones, la función de verosimilitud para β_1 , β_2 y σ desconocidos es:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_2, \sigma) &= \prod_{i=1}^n f(u_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i}{\sigma}\right)^2} \end{aligned}$$

Estimación del modelo de regresión simple por MV (3/3)

Ejercicio

Calcula la función de log-verosimilitud para el modelo de regresión simple. Calcula luego los estimadores de máxima verosimilitud de β_1 , β_2 y σ . Comenta.