

Econometría II

Modelos con datos de panel

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.05.06

Estructura de los datos panel

¿Qué son los datos de panel? (1/2)

En los modelos con **datos de panel**, tenemos simultáneamente las dimensiones de *espacio* y de *tiempo*: *la misma unidad de corte transversal se estudia a lo largo del tiempo*.

$$\begin{aligned} y_{it} &= \beta_1 x_{it}^1 + \beta_2 x_{it}^2 + \dots + \beta_k x_{it}^k + u_{it} \\ i &= 1, \dots, N \\ t &= 1, \dots, T \end{aligned}$$

¿Qué son los datos de panel? (2/2)

Un modelo con datos de panel se puede escribir de forma más compacta:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

donde:

$$\mathbf{x}_{it} = \begin{bmatrix} x_{it}^1 & x_{it}^2 & \dots & x_{it}^k \end{bmatrix}$$

y:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

Terminología

Se dice que:

- Un panel de datos es **balanceado** si cada sujeto tiene el mismo número de observaciones. El panel es **desbalanceado** si no.
- Un panel es **corto** si $N > T$. En cambio, un panel es **largo** si $T > N$.

Aquí estudiaremos paneles balanceados.

Cómo organizamos un panel de datos? (1/4)

La forma más común de organizar un panel de datos es por unidades de sección cruzada. Específicamente:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix}_{(T \times 1)} \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \mathbf{x}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{iT} \end{bmatrix}_{(T \times K)} \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix}_{(T \times 1)}$$

¿Cómo organizamos un panel de datos? (2/4)

Además, también podemos apilar los datos como sigue:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix}_{(NT \times 1)} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}_{(NT \times K)} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}_{(NT \times 1)}$$

Esto nos permite escribir el modelo como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

¿Cómo organizamos un panel de datos? (3/4)

A manera de ejemplo, considera el siguiente modelo de aerolíneas:

$$C_{it} = \beta_1 + \beta_2 Q_{it} + \beta_3 PF_{it} + \beta_4 LF_{it} + u_{it}$$
$$i = 1, 2, \dots, 6$$
$$t = 1, 2, \dots, 15$$

Donde:

- C_{it} : Costo total, 1000's de dólares
- Q_{it} : Producción, ingresos por milla por pasajero
- PF_{it} : Precio del combustible
- LF_{it} : Factor de carga

¿Cómo organizamos un panel de datos? (4/4)

El panel de datos se ve:

C	Q	PF	LF
$C_{1,1}$	$Q_{1,1}$	$PF_{1,1}$	$LF_{1,1}$
$C_{1,2}$	$Q_{1,2}$	$PF_{1,2}$	$LF_{1,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_{1,15}$	$Q_{1,15}$	$PF_{1,15}$	$LF_{1,15}$
$C_{2,1}$	$Q_{2,1}$	$PF_{2,1}$	$LF_{2,1}$
$C_{2,2}$	$Q_{2,2}$	$PF_{2,2}$	$LF_{2,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_{2,15}$	$Q_{2,15}$	$PF_{2,15}$	$LF_{2,15}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_{6,15}$	$Q_{6,15}$	$PF_{6,15}$	$LF_{6,15}$

Estimación del modelo básico: datos agrupados (1/2)

Si suponemos que se satisfacen los supuestos del modelo de regresión lineal ($u_{it} \sim iid(0, \sigma^2)$ para todo i y t , y que las variables explicativas sean exógenas), el estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO):

$$\mathbf{b} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}'\mathbf{y}$$

es *insesgado*, *eficiente* y *consistente*.

Problema. El modelo ignora la estructura de panel que tienen los datos. En particular, el modelo no toma en cuenta la **heterogeneidad** que existe entre las observaciones.

Estimación del modelo básico: datos agrupados (2/2)

Si estimamos por MCO el modelo de las aerolíneas obtenemos:

```
## Pooling Model
##
## Call:
## plm(formula = C ~ Q + PF + LF, data = airlines, model = "pooling")
##
## Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90
##
## Residuals:
##      Min. 1st Qu.  Median 3rd Qu.    Max.
## -520654 -250270   37333  208690  849700
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.1586e+06  3.6059e+05  3.2129  0.00185 **
## Q            2.0261e+06  6.1807e+04 32.7813 < 2.2e-16 ***
## PF           1.2253e+00  1.0372e-01 11.8138 < 2.2e-16 ***
## LF          -3.0658e+06  6.9633e+05 -4.4027 3.058e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Total Sum of Squares:    1.2647e+14
## Residual Sum of Squares: 6.8177e+12
## R-Squared:              0.94609
## Adj. R-Squared: 0.94421
## F-statistic: 503.118 on 3 and 86 DF, p-value: < 2.22e-16
```

Extensiones al modelo simple

Extensiones al modelo simple (1/2)

Como hemos dicho, el modelo básico no toma en cuenta la heterogeneidad que existe entre observaciones. Esto puede conducir a problemas de **endogeneidad**. Varias alternativas se han propuesto para evitar este problema. En general, consideraremos el siguiente modelo:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

donde suponemos que el número de individuos, N , es grande y el número de periodos, T , es corto. Además, suponemos que:

$$u_{it} = \alpha_i + \eta_{it}$$

donde η_{it} y $\mathbf{x}_{it}$ no están correlacionados. Aquí, η_{it} es un **efecto idiosincrático** y α_i es un **efecto individual**, o componente de error de corte transversal.

Extensiones al modelo simple (2/2)

Dependiendo de los supuestos sobre el efecto individual, tenemos:

- **Modelo de efectos aleatorios:** α_i y $\mathbf{X}_{it}$ no están correlacionados.
- **Modelo de efectos fijos:** α_i y $\mathbf{X}_{it}$ están correlacionados.

El modelo con efectos aleatorios

El modelo con efectos aleatorios (1/8)

En el modelo con efectos aleatorios tenemos que:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + u_{it}$$
$$u_{it} = \alpha_i + \eta_{it}$$

Además, el termino α_i no está correlacionado con $\mathbf{x}_{it}$ y:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}] = 0$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}'] = \sigma_{\eta}^2 \mathbf{I}_{NT}$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] = 0, \text{ para } i \neq j$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_i] = \sigma_{\alpha}^2$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i \eta_{jt}] = 0$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i] = 0$$

donde todos los valores esperados son condicionales a $\mathbf{X}$.

El modelo con efectos aleatorios (2/8)

Cuando el modelo verdadero es el modelo con efectos aleatorios, la estimación por MCO:

1. Produce estimadores *consistentes* de β , pero subestima los errores estándar de la regresión.
2. No es eficiente comparado con el procedimiento de **mínimos cuadrados generalizados (MCG)**.

El modelo con efectos aleatorios (3/8)

Como hemos aprendido, para estimar el modelo usando el método de mínimos cuadrados generalizados necesitamos factorizar la matriz de covarianzas de los errores.

Para este modelo:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Sigma} \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{uu}'] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}_{NT \times NT}\end{aligned}$$

El modelo con efectos aleatorios (4/8)

Dados nuestros supuestos, tenemos que:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbb{E}[\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i'] = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_T + \sigma_\alpha^2 \mathbf{i} \mathbf{i}' = \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 + \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\eta^2 + \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\eta^2 + \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$$

donde $\mathbf{i}$ es un vector de unos de tamaño $T \times 1$.

El modelo con efectos aleatorios (5/8)

Ejercicio

Muestra que:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbb{E}[\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i'] = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_T + \sigma_\alpha^2 \mathbf{i} \mathbf{i}'$$

El modelo con efectos aleatorios (6/8)

Además, se puede demostrar que:

$$\Sigma^{-1/2} = \left[\mathbf{I}_T - \frac{\theta_i}{T} \mathbf{i} \mathbf{i}' \right]$$

$$\theta = 1 - \sqrt{\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\eta^2 + T \sigma_\alpha^2}}$$

El modelo con efectos aleatorios (7/8)

Finalmente, podemos transformar las variables del modelo. Por ejemplo, para la variable dependiente:

$$\Sigma^{-1/2} \mathbf{y}_i = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \begin{bmatrix} y_{i1} - \theta \overline{y_{i\cdot}} \\ y_{i2} - \theta \overline{y_{i\cdot}} \\ \vdots \\ y_{iT} - \theta \overline{y_{i\cdot}} \end{bmatrix} ; \quad \overline{y_{i\cdot}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it}$$

Lo mismo para las variables explicativas del modelo.

El modelo con efectos aleatorios (8/8)

Para poder estimar el modelo por el método de los MCG (factibles), es necesario estimar las varianzas, σ_η y σ_α . Estas pueden obtenerse combinando dos diferentes estimadores:

- Estimador *entre* grupos o **between**.
- Estimador *intra* grupos o **within**.

Nota.

Ambos estimadores son consistentes, aunque no eficientes comparados con el estimador de MCG.

Estimador between (1/4)

Calculamos el promedio temporal de todas las variables del modelo:

$$\overline{y_{i\cdot}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it} ; \quad i = 1, \dots, N$$

$$\overline{x_{i\cdot}^j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it}^j ; \quad j = 1, \dots, K$$

Y planteamos el modelo:

$$\overline{y_{i\cdot}} = \overline{\mathbf{x}_{i\cdot}} \boldsymbol{\beta} + \text{error}$$

Estimador between (2/4)

El modelo tambien se puede expresar en términos matriciales. Para hacer esto:

- Definimos una matriz $\mathbf{D}$ formada de N variables dummy, una por cada unidad de observación. Nota que $\mathbf{D}$ es una matriz de dimensión $NT \times N$.
- Definimos ahora la siguiente matriz *simétrica* e *idempotente*.

$$\mathbf{P}_D = \mathbf{D}(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}'$$

- Premultiplicamos el modelo de base por la matriz $\mathbf{P}_D$.

Estimador between (3/4)

Ejercicio

Muestra que los modelos:

$$\mathbf{P}_D \mathbf{y} = \mathbf{P}_D \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}_D \mathbf{u}$$

y:

$$\overline{y_{i\cdot}} = \overline{\mathbf{x}_{i\cdot}} \boldsymbol{\beta} + \text{error}$$

son equivalentes.

Estimador between (4/4)

El **estimador between** resulta de estimar el *modelo transformado* por el método de los MCO:

$$\mathbf{b}_B = (\mathbf{X}'\mathbf{P}_D\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{P}_D\mathbf{y}$$

Nota. En otro contexto, a $\mathbf{b}_B$ también se le conoce como **estimador de Wald**.

Estimador within (1/2)

Si ahora definimos la matriz (*simétrica* e *idempotente*):

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{I}_{NT} - \mathbf{P}_D$$

y estimamos por el método de los MCO el modelo:

$$\mathbf{M}_D \mathbf{y} = \mathbf{M}_D \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}_D \mathbf{u}$$

Obtenemos el **estimador within**:

$$\mathbf{b}_W = (\mathbf{X}' \mathbf{M}_D \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{M}_D \mathbf{y}$$

Estimador within (2/2)

Ejercicio

Muestra que el estimador within es el resultado de estimar por MCO a todos los datos incluyendo un conjunto de variables dummy. Muestra, además, que el estimador within también se obtiene de estimar por MCO:

$$y_{it} - \overline{y_{i\cdot}} = (\mathbf{x}_{it} - \overline{\mathbf{x}_{i\cdot}})\boldsymbol{\beta} + \text{error}$$

Estimadores para σ_η y σ_α (1/2)

Ahora podemos calcular los estimadores para las varianzas de σ_η y σ_α . Estos son:

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{NT - NK - N} \mathbf{\hat{u}}_W' \mathbf{\hat{u}}_W$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\mathbf{\hat{u}}_B' \mathbf{\hat{u}}_B}{N - K}$$

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_B^2 - \frac{\sigma_\eta^2}{T}$$

donde:

$\mathbf{\hat{u}}_W$: Residuales del modelo within

$\mathbf{\hat{u}}_B$: Residuales del modelo between

Estimadores para σ_η y σ_α (2/2)

Ejercicio

Muestra que los estimadores de σ_η y σ_α son asintóticamente insesgados.

Estimadores *between* y *within* y el estimador de efectos aleatorios (1/5)

Si no contamos con una computadora que calcule el estimador de efectos aleatorios directamente, podemos utilizar el siguiente procedimiento:

- Calculamos los estimadores *between* y *within*.
- Utilizamos los residuales para calcular los términos de la varianza.

Estimadores between y within y el estimador de efectos aleatorios (2/5)

- Calculamos el estimador de θ .
- Calculamos el estimador de MCO de la siguiente regresión:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta} + \text{error}$$

$$\tilde{y}_{it} = y_{it} - \overline{y_{i\cdot}} + \theta \hat{\overline{y_{i\cdot}}}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{it} = \mathbf{x}_{it} - \overline{\mathbf{x}_{i\cdot}} + \theta \hat{\overline{\mathbf{x}_{i\cdot}}}$$

Nota que cuando $\sigma_{\alpha}^2 = 0$, $\theta = 1$ y el estimador de efectos aleatorios se reduce al estimador de MCO del modelo de base.

Estimadores between y within y el estimador de efectos aleatorios (3/5)

Ejercicio

Calcula *manualmente* los estimadores de efectos aleatorios mediante el cálculo de los estimadores between y within.

Estimadores between y within y el estimador de efectos aleatorios (4/5)

Ejercicio

Muestra que cuando $\sigma_{\alpha}^2 = 0$, $\theta = 1$ y el estimador de efectos aleatorios se reduce al estimador de MCO del modelo de base.

Estimadores between y within y el estimador de efectos aleatorios (5/5)

La estimación por MCG del modelo de las aerolíneas con efectos aleatorios resulta en:

```
## Oneway (individual) effect Random Effect Model
##   (Swamy-Arora's transformation)
##
## Call:
## plm(formula = C ~ Q + PF + LF, data = airlines, model = "random")
##
## Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90
##
## Effects:
##               var   std.dev share
## idiosyncratic 4.428e+10 2.104e+05 0.793
## individual    1.154e+10 1.074e+05 0.207
## theta: 0.5486
##
## Residuals:
##   Min. 1st Qu.  Median 3rd Qu.    Max.
## -535726 -238494   49890  207491  722934
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z-value Pr(>|z|)
## (Intercept)  1.0743e+06 3.7747e+05  2.8461  0.004427 **
## Q            2.2886e+06 1.0949e+05 20.9015 < 2.2e-16 ***
## PF           1.1236e+00 1.0344e-01 10.8622 < 2.2e-16 ***
## LF          -3.0850e+06 7.2568e+05 -4.2512 2.126e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Total Sum of Squares: 6.6108e+12
```

El modelo con efectos fijos

El modelo con efectos fijos (1/4)

En el modelo co efectos fijos tenemos:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + z_i \boldsymbol{\delta} + u_{it},$$

$$u_{it} = \alpha_i + \eta_{it}$$

y:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}] = 0$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}'] = \sigma_{\eta}^2 \mathbf{I}_{NT}$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] = 0, \text{ para } i \neq j$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_i] = \sigma_{\alpha}^2$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i \eta_{jt}] = 0$$

$$\mathbb{E}[\alpha_i] = 0$$

donde todos los valores esperados son condicionales a $\mathbf{X}$ y a $\mathbf{Z}$.

El modelo con efectos fijos (2/4)

En el modelo con efectos fijos tenemos un supuesto adicional:

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}'_{it} u_{it}] \neq 0 ; \quad \mathbf{w}_{it} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{it} & \mathbf{z}_i \end{bmatrix}$$

Dado que ahora α_i esta correlacionado con las variables explicativas, el estimador de MCO no será insesgado.

El modelo con efectos fijos (3/4)

Ejercicio

Muestra que el estimador de MCO no es insesgado en el modelo con efectos fijos.

El modelo con efectos fijos (4/4)

El modelo de efectos fijos toma en cuenta la posible correlación entre α_i y las variables explicativas. Para esto, tenemos dos posibilidades equivalentes:

- Estimar explícitamente el efecto fijo, α_i .
- Eliminar el efecto fijo, α_i .

Opción 1: Estimar el efecto fijo (1/3)

Para estimar explícitamente el efecto fijo, basta con definir una matriz $\mathbf{D}$ formada de N variables dummy, una por cada unidad de observación:

$$\mathbf{D}_{NT \times T} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{i}_T$$

Esto nos permite correr por MCO el siguiente modelo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}$$

Este modelo se conoce como modelo de **mínimos cuadrados con variable binaria**.

Opción 1: Estimar el efecto fijo (2/3)

Por ejemplo, el modelo de las aerolíneas sería ahora:

$$C_{it} = \alpha_1 + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \alpha_4 D_{4t} + \alpha_5 D_{5t} \\ + \beta_2 Q_{it} + \beta_3 PF_{it} + \beta_4 LF_{it} + u_{it}$$

$$i = 1, \dots, 6$$

$$t = 1, \dots, 15$$

Opción 1: Estimar el efecto fijo (3/3)

La estimación por MCO del modelo de aerolíneas con variables *dummy* resulta en:

```
## Pooling Model
##
## Call:
## plm(formula = C ~ Q + PF + LF + factor(I) - 1, data = airlines,
##      model = "pooling")
##
## Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90
##
## Residuals:
##      Min.      1st Qu.      Median      3rd Qu.      Max.
## -551782.9 -159258.6      1796.2    137225.9    499296.1
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
## Q              3.3190e+06  1.7135e+05  19.3694 < 2.2e-16 ***
## PF              7.7307e-01  9.7319e-02   7.9437 9.698e-12 ***
## LF             -3.7974e+06  6.1377e+05  -6.1869 2.375e-08 ***
## factor(I)1    -1.3124e+05  3.5078e+05  -0.3741 0.7092857
## factor(I)2     4.7050e+05  3.0908e+05   1.5223 0.1318389
## factor(I)3     1.2059e+06  3.3236e+05   3.6285 0.0004975 ***
## factor(I)4     1.6464e+06  3.1835e+05   5.1716 1.644e-06 ***
## factor(I)5     1.6970e+06  3.3478e+05   5.0691 2.477e-06 ***
## factor(I)6     1.5752e+06  3.0732e+05   5.1258 1.975e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Total Sum of Squares:    1.2647e+14
## Residual Sum of Squares: 3.5865e+12
## R-Squared:              0.97164
## Adj. R-Squared:         0.96884
## F-statistic: 592.953 on 9 and 81 DF. p-value: < 2.22e-16
```

Opción 2: Eliminar el efecto fijo (1/6)

La otra opción para tratar con los efectos fijos es eliminarlos del modelo. Una posibilidad es calcular *primeras diferencias*:

$$\Delta y_{it} = \beta_1 \Delta x_{it}^1 + \beta_2 \Delta x_{it}^2 + \dots + \beta_k \Delta x_{it}^k + \Delta u_{it}$$

$$\Delta z_{it} = z_{it} - z_{it-1}$$

$$z_{it} = \{y_{it}, x_{it}^j, u_{it}\}$$

Opción 2: Eliminar el efecto fijo (2/6)

Para ver la lógica de esto, suponemos por un momento que $T = 2$. En este caso tenemos:

$$y_{i1} = \mathbf{x}_{i1} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta} + u_{i1}$$

$$y_{i2} = \mathbf{x}_{i2} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta} + u_{i2}$$

Opción 2: Eliminar el efecto fijo (3/6)

Ahora, consideramos la siguiente combinación lineal de y_{i1} y y_{i2} , tal que eliminen los efectos fijos:

$$\begin{aligned} y_{i1} - y_{i2} &= (\mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i)\boldsymbol{\delta} + (u_{i2} - u_{i1}) \\ \Delta \mathbf{y} &= \Delta \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \Delta \mathbf{z}\boldsymbol{\delta} + \Delta \mathbf{u} \\ &= \Delta \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \Delta \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

Para esta transformación tenemos que:

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{X}' \Delta \boldsymbol{\eta}] = 0 !$$

Opción 2: Eliminar el efecto fijo (4/6)

Ejercicio

Muestra que para cualquier número de periodos, el **estimador de primeras diferencias** se puede obtener si post-multiplicamos el vector:

$$\begin{bmatrix} y_{i1} & y_{i2} & \dots & y_{iT} \end{bmatrix}_{1 \times T}$$

por la matriz:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{T \times (T-1)}$$

Opción 2: Eliminar el efecto fijo (5/6)

La estimación por MCO del modelo de aerolíneas en primeras diferencias resulta en:

```
## Oneway (individual) effect First-Difference Model
##
## Call:
## plm(formula = C ~ Q + PF + LF + factor(I), data = airlines, model = "fd")
##
## Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90
## Observations used in estimation: 84
##
## Residuals:
##      Min. 1st Qu.  Median 3rd Qu.    Max.
## -232631  -58504   -25086    31884   493212
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
## (Intercept)  7.3268e+04  1.6544e+04  4.4286 2.975e-05 ***
## Q            1.1493e+06  2.1346e+05  5.3842 7.099e-07 ***
## PF           5.7761e-01  1.3371e-01  4.3197 4.449e-05 ***
## LF          -1.7024e+06  4.7366e+05 -3.5941 0.000561 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Total Sum of Squares:    1.5613e+12
## Residual Sum of Squares: 9.9318e+11
## R-Squared:      0.36388
## Adj. R-Squared: 0.34002
## F-statistic: 15.2539 on 3 and 80 DF, p-value: 6.1466e-08
```

Opción 2: Eliminar el efecto fijo (6/6)

De nuestro análisis anterior deducimos que:

- Transformando los datos del modelo, podemos obtener estimadores *consistentes* aun cuando los estimadores de MCO ecuación por ecuación sean *sesgados*.
- Sin embargo, cuando calculamos los estimadores de *efectos fijos* no podemos recuperar los estimadores de cualquier variable que no dependa del tiempo.
- El estimador de efectos fijos es *robusto* aun cuando se excluyan variables que no dependan del tiempo.
- Cuando el modelo de *efectos aleatorios* es válido, el modelo de *efectos fijos* aun produce estimadores *consistentes*.

El modelo con efectos fijos: estimador *within* (1/4)

Consideremos nuevamente el modelo:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \alpha_i + \eta_{it}$$

Otra opción para eliminar el efecto individual consiste en calcular el **estimador within**:

$$\mathbf{b}_W = (\mathbf{X}' \mathbf{M}_D \mathbf{X})' (\mathbf{X}' \mathbf{M}_D \mathbf{y})$$

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{I} - \mathbf{D}(\mathbf{D}' \mathbf{D}) \mathbf{D}'$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{i}_T$$

El modelo con efectos fijos: estimador *within* (2/4)

Ejercicio

Muestra que el estimador *within* elimina los efectos fijos, α_i , del modelo original.

Pista. Nota como el modelo con efectos fijos puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}$$

El modelo con efectos fijos: estimador *within* (3/4)

Nota. Cuando usamos el estimador within para estimar los efectos fijos, los errores estándar tienen que corregirse. Los errores estándar correctos se calculan a partir de:

$$\mathbf{\Omega}_{bw} = \sigma_{\eta}^2 (\mathbf{X}' \mathbf{M}_D \mathbf{X})'$$

donde el estimador de σ_{η} debería calcularse como:

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\mathbf{u}'_W \mathbf{u}_W}{NT - N - K}$$

Sin embargo, la computadora calcula este estimador como (¿Por qué?):

$$\sigma_{\text{computadora}}^2 = \frac{\mathbf{u}'_W \mathbf{u}_W}{NT - K}$$

Entonces para corregir los grados de libertad calculamos:

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{NT - K}{NT - NK - K} \sigma_{\text{computadora}}^2$$

El modelo con efectos fijos: estimador *within* (4/4)

La estimación por MCO del modelo de aerolíneas con efectos fijos versión *within* resulta en:

```
## Oneway (individual) effect Within Model
##
## Call:
## plm(formula = C ~ Q + PF + LF, data = airlines, model = "within")
##
## Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90
##
## Residuals:
##      Min. 1st Qu.  Median      Mean 3rd Qu.     Max.
## -551783 -159259    1796         0  137226  499296
##
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
## Q   3.3190e+06  1.7135e+05  19.3694 < 2.2e-16 ***
## PF   7.7307e-01  9.7319e-02   7.9437 9.698e-12 ***
## LF  -3.7974e+06  6.1377e+05  -6.1869 2.375e-08 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Total Sum of Squares:    5.0776e+13
## Residual Sum of Squares: 3.5865e+12
## R-Squared:              0.92937
## Adj. R-Squared: 0.92239
## F-statistic: 355.254 on 3 and 81 DF, p-value: < 2.22e-16
```

**¿Efectos fijos o efectos
aleatorios?**

La prueba de Wu-Hausman (1/3)

Normalmente, los resultados de estimar un modelo con efectos fijos y un modelo con efectos aleatorios son diferentes. Entonces, ¿cuál de los dos modelos debemos elegir?

Como hemos dicho:

- Si los efectos individuales *no están correlacionados* con las variables explicativas, el estimador de efectos aleatorios es consistente y eficiente. El estimador de efectos fijos es consistente, pero no eficiente.
- Si los efectos individuales *están correlacionados* con las variables explicativas, el estimador de efectos fijos es consistente y eficiente. El estimador de efectos aleatorios es inconsistente.

La prueba de Wu-Husman (2/3)

La prueba de **Wu-Hausman** consiste en calcular el estadístico:

$$H = (\mathbf{b}_{RE} - \mathbf{b}_{FE})' (\boldsymbol{\Sigma}_{FE} - \boldsymbol{\Sigma}_{RE})^{-1} (\mathbf{b}_{RE} - \mathbf{b}_{FE})$$

Y plantear la siguiente:

H_0 : Modelo con efectos aleatorios

H_1 : Modelo sin efectos aleatorios

Se puede mostrar que si H_0 es verdadero:

$$H \sim \chi_k^2$$

La prueba de Wu-Husman (3/3)

En el ejemplo de las aerolíneas tenemos:

```
##  
## Hausman Test  
##  
## data: C ~ Q + PF + LF  
## chisq = 60.87, df = 3, p-value = 3.832e-13  
## alternative hypothesis: one model is inconsistent
```

La prueba de Breush-Pagan (1/2)

Es importante resaltar que aun si rechazamos H_0 en la prueba de Wu-Hausman *no podemos estar completamente seguros de que el modelo verdadero es el de efectos fijos*. La única conclusión que podemos derivar de la prueba de Wu-Hausman es que la diferencia entre los dos estimadores $\mathbf{b}_{RE}$ y $\mathbf{b}_{FE}$ no es estadísticamente significativa.

Otra prueba que suele aplicarse es la de *Breush-Pagan*. En esta:

$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0 \implies \text{No hay efectos aleatorios}$$

$$H_a : \sigma_\alpha^2 \neq 0 \implies \text{Hay efectos aleatorios}$$

Se puede mostrar que si H_0 es verdadero:

$$BP \sim \chi_1^2$$

La prueba de Breush-Pagan (2/2)

En el ejemplo de las aerolíneas tenemos:

```
##  
## Lagrange Multiplier Test - (Breusch-Pagan)  
##  
## data: C ~ Q + PF + LF  
## chisq = 0.61309, df = 1, p-value = 0.4336  
## alternative hypothesis: significant effects
```

Nota que ambas pruebas indican la conveniencia de utilizar un modelo de efectos fijos.

La prueba de Welch (1/2)

Otra prueba que suele realizarse cuando estimamos modelos con datos de panel es la **prueba de Welch**, la cual nos permite detectar si existe *heterogeneidad entre unidades*. En particular:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_N$$

$$H_a : \text{Al menos una media de grupo es diferente}$$

El estadístico de Welch se construye como:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^N w_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 / (N - 1)}{1 + \frac{2(N - 2)}{N^2 - 1} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_i - 1} \left(1 - \frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j} \right)^2}; \quad w_i = \frac{T_i}{s_i^2}$$

La prueba de Welch contrasta si las medias de los grupos pueden considerarse iguales, permitiendo que las varianzas difieran entre grupos. Si rechazamos H_0 , tenemos evidencia de que las unidades no son homogéneas entre sí.

La prueba de Welch (2/2)

Bajo H_0 tenemos:

$$W \sim F_{N-1, \nu}$$

donde ν es un número aproximado de grados de libertad dado por:

$$\nu = \frac{N^2 - 1}{3 \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_i - 1} \left(1 - \frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j} \right)^2}$$

Si rechazamos H_0 , tenemos evidencia de heterogeneidad entre las unidades de corte transversal. Esto sugiere que el modelo agrupado podría ser demasiado restrictivo y que conviene considerar modelos con efectos individuales.

Práctica

Práctica

Utiliza los datos: [E212-charity.csv](#) para hacer un análisis completo utilizando los modelos de datos de panel. El objetivo es determinar cuáles son las variables que determinan el monto donado a la caridad.

charity : Suma de dinero destinado a la caridad.

income : Ingreso bruto.

price : 1-tasa impositiva al ingreso.

age : Variable dummy = 1 si la persona tiene más de 64 años.

ms : Variable dummy = 1 si la persona está casada.

deps : Número de dependientes económicos.