

Econometría II

Ecuaciones simultáneas

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2025.04.09

Modelos estructural y reducido

Modelo estructural (1/2)

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}p &= \beta_1 + \beta_2 w + u_p \\ w &= \alpha_1 + \alpha_2 p + \alpha_3 U + u_w ,\end{aligned}$$

donde las **variables endógenas** son p , la inflación en precios, y w , la inflación en salarios; y U , la tasa de desempleo, es una **variable exógena**. Además:

$$\begin{aligned}u_p &\sim iid \square(\mu_p, \sigma_p^2) \\ u_w &\sim iid \square(\mu_w, \sigma_w^2)\end{aligned}$$

Por simplicidad, supondremos que u_p y u_w son independientes.

Modelo estructural

Ejercicio

El sistema anterior se conoce como **modelo en forma estructural**. Muestra que este también puede escribirse en forma matricial:

$$\mathbf{D}\mathbf{Y} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{X} = \mathbf{U}$$

donde $\mathbf{D}$ es la matriz de los coeficientes de las variables endógenas, $\mathbf{\Gamma}$ es la matriz de los coeficientes de las variables exógenas, $\mathbf{Y}$ es un vector de variables endógenas, $\mathbf{X}$ es un vector de variables exógenas. $\mathbf{U}$ es un vector de errores que, en este caso, toma la forma:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_p \\ u_w \end{pmatrix} \sim \square(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$$

Modelo reducido (1/5)

El sistema estructural de nuestro ejemplo puede resolverse para encontrar el **modelo en forma reducida**:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\beta_1 + \alpha_1 \beta_2}{1 - \alpha_2 \beta_2} + \frac{\alpha_3 \beta_2}{1 - \alpha_2 \beta_2} U + \frac{u_p + \beta_2 u_w}{1 - \alpha_2 \beta_2} \\ w &= \frac{\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1}{1 - \alpha_2 \beta_2} + \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_2 \beta_2} U + \frac{u_w + \alpha_2 u_p}{1 - \alpha_2 \beta_2} \end{aligned}$$

Nota que en el lado derecho de estas ecuaciones aparecen exclusivamente variables exógenas (y constantes).

Modelo reducido (2/5)

En nuestro ejemplo, el sistema reducido puede expresarse en una forma más compacta:

$$\begin{aligned}p &= \pi_{11} + \pi_{12}U + \nu_p \\w &= \pi_{21} + \pi_{22}U + \nu_w\end{aligned}$$

Dado que p y w son funciones de U , una variable exógena, cada ecuación del sistema reducido puede estimarse por el método de los MCO. (¿Por qué?)

Modelo reducido (3/5)

Ejercicio

Muestra que en el sistema reducido:

$$\begin{aligned}p &= \pi_{11} + \pi_{12}U + \nu_p \\w &= \pi_{21} + \pi_{22}U + \nu_w,\end{aligned}$$

los errores ν_p y ν_w satisfacen todos los supuestos de Gauss-Markov.

Modelo reducido (4/5)

Ejercicio

Naturalmente, el sistema reducido también puede encontrarse como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi X} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{V} \sim \square(\mathbf{0}, \mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Sigma}(\mathbf{D}^{-1})')$$

donde:

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Gamma}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}$$

Encuentra el sistema reducido usando esta forma matricial.

Modelo reducido (5/5)

Nota

En el sistema reducido $\mathbf{w}$ depende de $\mathbf{u}_p$, y $\mathbf{p}$ depende de $\mathbf{u}_w$. Esto implica que no deberíamos estimar por MCO y por separado cada ecuación del sistema estructural. (¿Por qué?)

Estimación por MCO (1/3)

Supongamos que deseamos estimar por MCO solo la primera ecuación del sistema estructural:

$$p = \beta_1 + \beta_2 w + u_p$$

En este caso:

$$b_2^{MCO} = \frac{\text{cov}(w, p)}{\text{var}(w)}$$

Estimación por MCO (2/3)

Para calcular el tamaño del sesgo (para muestras grandes), aplicamos el límite en probabilidad a ambos lados de esta ecuación:

$$p \lim(b_2^{MCO}) = \beta_2 + \frac{(1 - \alpha_2\beta_2)\alpha_2\sigma_p^2}{\alpha_3^2\sigma_u^2 + \sigma_w^2 + \alpha_2^2\sigma_p^2}$$

Naturalmente, como se espera que $\alpha_2 > 0$, el sesgo del estimador será positivo si $\alpha_2\beta_2 < 1$.

Estimación por MCO (3/3)

Ejercicio

Muestra que el límite en probabilidad del estimador de β_2 en la primera ecuación estructural es:

$$p \lim(b_2^{MCO}) = \beta_2 + \frac{(1 - \alpha_2 \beta_2) \alpha_2 \sigma_p^2}{\alpha_3^2 \sigma_u^2 + \sigma_w^2 + \alpha_2^2 \sigma_p^2}$$

Estimación del modelo: Variables instrumentales

Estimación por VI (1/9)

Consideremos nuevamente el modelo:

$$\begin{aligned}p &= \beta_1 + \beta_2 w + u_p \\w &= \alpha_1 + \alpha_2 p + \alpha_3 U + u_w\end{aligned}$$

Pero esta vez estimemos la primera ecuación del modelo estructural usando el **método de las variables instrumentales**. Sabemos que:

$$\mathbf{b}^{VI} = (\mathbf{z}'\mathbf{x})^{-1} \mathbf{z}'\mathbf{y}$$

Esta, para el caso de la primera ecuación del sistema estructural, se vuelve:

$$b_2^{VI} = \frac{\text{cov}(z, p)}{\text{cov}(z, w)}$$

Estimación por VI (2/9)

Pero...¿quién es $\mathbf{z}$ en la ecuación anterior?

Un buen instrumento puede identificarse observando el modelo en su forma reducida. En nuestro ejemplo, un buen instrumento para $\mathbf{w}$ que nos permite estimar la primera ecuación del modelo estructural es $\mathbf{U}$. (¿Por qué?)

Entonces:

$$b_2^{VI} = \frac{\text{cov}(U, p)}{\text{cov}(U, w)}$$

Estimación por VI (3/9)

Ejercicio

Muestra que el estimador de variables instrumentales para β_2 es insesgado para muestras grandes (es decir, es consistente).

Estimación por VI (4/9)

Supongamos ahora que deseamos estimar la segunda ecuación del modelo estructural:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 p + \alpha_3 U + u_w$$

¿Qué variable utilizamos para instrumentar p ? La única exógena que tenemos a la mano es U . Sin embargo, si utilizamos U , se puede mostrar que el estimador de variables instrumentales se indefine.

Estimación por VI (5/9)

Ejercicio

Muestra que si usamos U para instrumentar a p en la segunda ecuación del modelo estructural, el estimador de variables instrumentales se indefine.

Nota.

Observa que el modelo estructural propuesto tiene dos variables endógenas (p y w) y solamente un instrumento (U). Cuando esto ocurre decimos que el sistema está **sub-identificado**.

Estimación por VI (6/9)

Ejercicio

Considera el modelo:

$$\begin{aligned}p &= \beta_1 + \beta_2 w + \beta_3 m + u_p \\w &= \alpha_1 + \alpha_2 p + \alpha_3 U + u_w\end{aligned}$$

donde m representa la oferta monetaria. Encuentra los estimadores de variables instrumentales para ambas ecuaciones del modelo estructural.

Nota.

Observa que el modelo estructural propuesto ahora tiene dos variables endógenas (p y w) y dos posibles instrumentos (m y U). Cuando esto ocurre decimos que el sistema está **exáctamente identificado**.

Estimación por VI (7/9)

Ejercicio

Considera el modelo:

$$\begin{aligned}p &= \beta_1 + \beta_2 w + u_p \\ w &= \alpha_1 + \alpha_2 p + \alpha_3 U + \alpha_4 x + u_w\end{aligned}$$

donde x representa la tasa de crecimiento de la productividad. Encuentra el estimador de variables instrumentales para β_2 en la primera ecuación del modelo estructural.

Nota.

Observa que para estimar la primera ecuación estructural tenemos más de un instrumento disponible para w . Cuando esto ocurre decimos que una de las ecuaciones del modelo estructural está **sobre-identificada**. ¿Cuál de los dos instrumentos es preferible?

Estimación por VI (8/9)

En el ejemplo anterior, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{x}$ son dos buenos instrumentos para $\mathbf{w}$. Por lo tanto, podemos usar cualquiera de los dos para obtener estimadores consistentes de β_2 . La varianza del estimador sería:

$$\sigma_{b_2^{VI}}^2 = \frac{\sigma_{u_p}^2}{n\text{var}(\mathbf{w})} \times \frac{1}{r_{\mathbf{w},\mathbf{U}}^2} \quad \text{o} \quad \sigma_{b_2^{VI}}^2 = \frac{\sigma_{u_p}^2}{n\text{var}(\mathbf{w})} \times \frac{1}{r_{\mathbf{w},\mathbf{x}}^2}$$

El instrumento más fuerte es el que tenga un *coeficiente de correlación más* alto con la variable $\mathbf{w}$.

Estimación por VI (9/9)

En la práctica, no tenemos que preocuparnos de cuál es el estimador más fuerte. En su lugar usamos el método de los **mínimos cuadrados en dos etapas**. Primero encontramos:

$$\mathbf{z} = \hat{w} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 U + \hat{h}_3 x$$

donde h_1 , h_2 y h_3 se estiman utilizando el método de los MCO. Luego usamos $\mathbf{z}$ como instrumento. Nota que en este caso:

$$\sigma_{b_2^{VI}}^2 = \frac{\sigma_{u_p}^2}{n\text{var}(w)} \times \frac{1}{r_{w,z}^2} = \frac{\sigma_{u_p}}{n\text{var}(w)} \times \frac{1}{r_{w,\hat{w}}^2}$$

Entre más instrumentos tengamos, más pequeña es la varianza del estimador. ¿Por qué?

Ejemplo (1/3)

Considera el modelo de oferta y demanda de trufas negras:

$$q_i = \alpha_1 + \alpha_2 p_i + \alpha_3 ps_i + \alpha_4 di_i + u_i^d$$
$$q_i = \beta_1 + \beta_2 p_i + \beta_3 pf_i + u_i^s$$

Las variables endógenas son q y p . Podemos, sin embargo, estimar ambas ecuaciones por el método de las variables instrumentales. En la primera ecuación usamos pf_i como instrumento de p . En la segunda ecuación podemos usar tanto ps_i como di_i .

Ejemplo (2/3)

Los resultados para la primera ecuación son:

```
##
## Call:
## ivreg(formula = q ~ p + ps + di | ps + di + pf, data = data)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -14.8513  -2.5393   0.9025   3.1155   7.5830
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -4.2795     5.5439  -0.772  0.44712
## p            -0.3745     0.1648  -2.273  0.03154 *
## ps             1.2960     0.3552   3.649  0.00116 **
## di             5.0140     2.2836   2.196  0.03724 *
##
## Diagnostic tests:
##              df1 df2 statistic  p-value
## Weak instruments    1  26    20.57 0.000115 ***
## Wu-Hausman          1  25    110.40 1.17e-10 ***
## Sargan              0  NA         NA         NA
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.93 on 26 degrees of freedom
## Multiple R-Squared:  -0.02395,    Adjusted R-squared:  -0.1421
## Wald test: 5.903 on 3 and 26 DF,  p-value: 0.003266
```


Ejemplo (3/3)

Los resultados de la segunda ecuación son:

```
##
## Call:
## ivreg(formula = q ~ p + pf | ps + di + pf, data = data)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.7829 -0.8530  0.2270  0.7578  3.3475
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 20.03280    1.22311   16.38 1.50e-15 ***
## p           0.33798    0.02492   13.56 1.43e-13 ***
## pf          -1.00091    0.08253  -12.13 1.95e-12 ***
##
## Diagnostic tests:
##              df1 df2 statistic  p-value
## Weak instruments    2  26   41.487 8.12e-09 ***
## Wu-Hausman          1  26    0.000   1.000
## Sargan              1 NA     1.533   0.216
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.498 on 27 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.9019, Adjusted R-squared: 0.8946
## Wald test: 95.26 on 2 and 27 DF, p-value: 5.851e-13
```

Mínimos Cuadrados Indirectos

Mínimos Cuadrados Indirectos (1/5)

Cuando alguna(s) de las ecuaciones del sistema estructural está(n) *exáctamente identificada(s)* (exactamente un instrumento por cada variable endógena), esta(s) puede(n) estimarse mediante el método de los **Mínimos Cuadrados Indirectos** (MCI).

Mínimos Cuadrados Indirectos (2/5)

Para aplicar el método de los MCI, consideremos el sistema reducido:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi X} + \mathbf{V}$$

donde:

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Gamma}$$

Entonces, si estimamos $\mathbf{\Pi}$ por MCO y la matriz $\mathbf{D}$ es conocida (o está normalizada), podemos obtener un estimador de $\mathbf{\Gamma}$ como:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = -\mathbf{D}\hat{\mathbf{\Pi}}$$

Mínimos Cuadrados Indirectos (3/5)

Ejercicio

Encuentra, si es posible, los estimadores de MCI para el siguiente sistema estructural:

$$\begin{aligned}p &= \beta_1 + \beta_2 w + u_p \\w &= \alpha_1 + \alpha_2 p + \alpha_3 U + u_w\end{aligned}$$

Mínimos Cuadrados Indirectos (4/5)

Nota

Aunque tradicionalmente se ha afirmado que el método de MCI sólo es válido para ecuaciones exactamente identificadas, Park (1974) muestra que este método también puede usarse cuando la ecuación está sobreidentificada, siempre y cuando tratemos a la relación $\mathbf{\Gamma} = -\mathbf{D\Pi}$ como una *relación estocástica y no exacta*.

Mínimos Cuadrados Indirectos (5/5)

Ejercicio

Muestra que, cuando el método de los MCI se aplica a una sola ecuación del sistema estructural, sus estimadores son *idénticos* a los de MC2E.

Práctica

Práctica

Utiliza los datos: [E210-eawe.csv](#) para analizar y estimar el modelo:

$$\begin{aligned}S_i &= \alpha_1 + \alpha_2 ASVABC_i + \alpha_3 SM_i + u_i^S \\ASVABC_i &= \beta_1 + \beta_2 S_i + u_i^A\end{aligned}$$

Donde:

S = Años de escolaridad (máximo grado completado al 2011).

$ASVABC$ = Rendimiento escolar.

SM = Años de escolaridad de la madre (biológica).

Nota: Rendimiento escolar es el puntaje de pruebas de razonamiento aritmético, verbal y comprensión.