

Econometría II

*Consistencia y la ley de los grandes
números*

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.03.03

Motivación

Motivación (1/3)

Antes, hemos estudiado con detalle el modelo de regresión lineal:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$$

En particular, analizamos las propiedades de los estimadores de MCO. *Bajo el supuesto de que los regresores son deterministas* demostramos que los estimadores son:

- **Insesgados**
- **Eficientes**

Motivación (2/3)

Sin embargo, en la práctica los regresores no son necesariamente deterministas. Piensa por ejemplo en:

- Ingreso
- Educación
- Precios
- PIB
- Etc.

¿Cómo se comportan los estimadores de MCO cuando los regresores son estocásticos? ¿Siguen siendo insesgados?
¿Siguen siendo eficientes? ¿Cómo se comportan conforme crece el tamaño de la muestra?

Motivación (3/3)

En este capítulo, estudiamos uno de los conceptos más importantes en teoría asintótica:

Consistencia

Entre más y más datos, eventualmente encontramos la verdad.

Ejemplo (1/3)

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*iid*) con:

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu$$

y:

$$Var(X_i) = \sigma^2$$

Supongamos, además, que no conocemos la función de densidad (*pdf*) de $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, pero el valor de σ es conocido.

Ejemplo (2/3)

Un estimador natural para μ es:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \overline{X}\end{aligned}$$

Nota que:

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}) = \mu; \text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Por lo tanto, cuando $n \rightarrow \infty$, $\text{Var}(\hat{\mu}) \rightarrow 0$.

Ejemplo (3/3)

Lo anterior sugiere que, cuando el tamaño de la muestra crece:

$$\hat{\mu} \rightarrow \mu.$$

En palabras: *cuando la muestra crece, la media muestral se acerca a su valor verdadero.*

Esto sugiere que la media muestral es un buen estimador de μ cuando la muestra es grande.

Ley de los grandes números

Convergencia en probabilidad (1/2)

Definición

La secuencia $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ converge en probabilidad hacia una constante o variable aleatoria c :

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = c$$

si, para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - c| > \varepsilon) = 0$$

Convergencia en probabilidad (2/2)

Definición (cont 'd)

El vector $\mathbf{Y}_n = (Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nk})'$, converge en probabilidad hacia un vector de constantes o vector de variables aleatorias $\mathbf{c}$:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n = \mathbf{c}$$

si:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{ni} = c_i$$

Consistencia

Sea $\hat{\theta}$ un estimador del escalar θ . Se dice que $\hat{\theta}$ es consistente si:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$$

Sea $\hat{\theta}$ un estimador del vector θ . Se dice que $\hat{\theta}$ es consistente si:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_i = \theta_i$$

Para demostrar que un estimador es consistente, necesitamos analizar el comportamiento de los promedios muestrales cuando el tamaño de la muestra crece.

LLN: Chebychev

Teorema

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una secuencia de variables aleatorias *iid* con $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ y $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$.
Entonces:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X} = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$= \mathbb{E}(X_i)$$

$$= \mu$$

LLN: Kolmogorov

Teorema

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una secuencia de variables aleatorias *iid* con $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$ y $\mathbb{E}(X_i) = \mu$. Entonces:

$$\begin{aligned} p \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X} &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \mathbb{E}(X_i) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Nota que, a diferencia de la LLN de Chebychev, la versión de Kolmogorov *no requiere* que la $\text{Var}(X_i)$ exista. Esta LLN cubre el caso de variables aleatorias con colas anchas.

LLN: Markov

Teorema

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una secuencia de variables aleatorias *no correlacionadas* con $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ y $Var(X_i) = \sigma^2 \leq M < \infty$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned} p \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{X} - \mu) &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \right) \\ &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto es, aun cuando no tenemos supuesto de variables *iid*, aun podemos tener convergencia en la media muestral.

¿Para qué sirve la LLN?

En términos generales, la LLN establece que:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}(X_i)$$

Sin embargo, muchos estimadores no son simplemente promedios. Más bien, se trata de funciones de promedios. Por ejemplo:

- Varianza muestral
- Estimadores de MCO

Para saber qué pasa con estos estimadores cuando el tamaño de la muestra crece, usamos el **teorema de Slutsky**.

Teorema de Slutsky

Teorema

Sean $\{Y_n\}$ y $\{Z_n\}$ secuencias de variables aleatorias, y sean a, b, c , y d constantes. Entonces:

- Si $Y_n = a$, entonces $p \lim Y_n = a$.
- Si $p \lim Y_n = c$ y $p \lim Z_n = d$, entonces $p \lim(Y_n + Z_n) = c + d$.
- Si $p \lim Y_n = c$ y $p \lim Z_n = d$, entonces $p \lim(Y_n Z_n) = cd$.
- Si $p \lim Y_n = c$ y $p \lim Z_n = d$, entonces $p \lim(Y_n/Z_n) = c/d$, en tanto $d > 0$.
- Si $p \lim Y_n = c$ y $h(\cdot)$ es una función continua en c , entonces $p \lim h(Y_n) = h(c)$.

Ejemplo

Ejercicio

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una secuencia de variables aleatorias *iid* con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Demuestra que:

$$\begin{aligned} p \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Aplicación: MCO (1/2)

Ejercicio

Considera el modelo de regresión lineal simple:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

donde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ es una secuencia de variables aleatorias *iid* con $\mathbb{E}(x_i) = \mu_x$ y $\text{Var}(x_i) = \sigma_x^2 < \infty$, y u_i una secuencia de variables aleatorias *iid* con $\mathbb{E}(u_i) = 0$ y $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 < \infty$. Demuestra que:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} b_2 = \beta_2,$$

donde b_2 es el estimador de *MCO* para β_2 .

Aplicación: MCO (2/2)

Ejercicio: pistas

Para realizar el ejercicio anterior:

1. Expresa la fórmula del estimador de MCO en función del término de error.
2. Para utilizar la LLN es necesario que todos los elementos estén expresados en términos de promedios.
3. Dado que las variables involucradas tienen varianza finita, utiliza la LLN de Chebyshev.
4. Utiliza las propiedades del límite en probabilidad (teorema de Slutsky) para concluir que:

$$p \lim b_2 = \beta_2$$