

Econometría II

El método de los Mínimos Cuadrados Generalizados

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.01.27

Varianzas y covarianzas de los errores

Varianzas y covarianzas de los errores

La **matriz de varianzas y covarianzas de los errores** puede calcularse como:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{E}(\mathbf{uu}')$$

Cuando se cumplen todos los supuestos de Gauss-Markov:

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \mathbf{I}_n,$$

donde σ^2 es la varianza constante de los errores y $\mathbf{I}_n$ es una matriz identidad $n \times n$.

¿En qué consiste la heteroscedasticidad?

En presencia de **heteroscedasticidad**:

$$\begin{aligned}\text{var}(u_i) &= \mathbb{E}(u_i^2) \\ &= \sigma_i^2,\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

¿En qué consiste la autocorrelación?

En presencia de **autocorrelación**:

$$\begin{aligned}\text{cov}(u_i, u_j) &= \mathbf{E}(u_i u_j) \\ &= \sigma_{ij},\end{aligned}$$

para $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$. Esto implica:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma^2 & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_{3n} & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Heteroscedasticidad y autocorrelación

Naturalmente, en presencia de **heteroscedasticidad y autocorrelación** de forma simultánea, tenemos:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_{3n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de los estimadores de MCO

Propiedades de los estimadores de MCO (1/3)

En presencia de heteroscedasticidad y/o autocorrelación, los estimadores de MCO siguen siendo **insesgados**. Nota que:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}'\mathbf{y} \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

Dado que:

$$\mathbf{E}(u_i) = 0,$$

entonces:

$$\mathbb{E}(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$$

Propiedades de los estimadores de MCO (2/3)

Calculamos ahora la varianza de los estimadores de MCO. En presencia de heteroscedasticidad y/o autocorrelación podemos demostrar que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})'] &= (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \\ &\geq \sigma^2(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\end{aligned}$$

- El lado derecho de la desigualdad corresponde a la varianza de los estimadores cuando todos los supuestos de Gauss-Markov se satisfacen.
- La desigualdad implica que, aunque los estimadores de MCO siguen siendo insesgados (y consistentes), son ineficientes.

Propiedades de los estimadores de MCO (3/3)

Ejercicio

Prueba que los estimadores de MCO siguen siendo consistentes en presencia de heteroscedasticidad y/o autocorrelación.

Mínimos Cuadrados Generalizados

Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) (1/4)

¿Cómo hacemos la estimación de los coeficientes en presencia de heteroscedasticidad y/o autocorrelación?

Consideremos el modelo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u},$$
$$\mathbb{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \boldsymbol{\Omega}$$

Si conocemos la matriz $\boldsymbol{\Omega}$, podemos utilizar el método de los **Mínimos Cuadrados Generalizados** (MCG o GLS, por sus siglas en inglés).

Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) (2/4)

Dado que $\mathbf{\Omega}$ es simétrica y definida positiva, existe una matriz $\mathbf{P}$ tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}' &= \mathbf{I}_n \\ \Rightarrow \mathbf{\Omega}^{-1} &= \mathbf{P}\mathbf{P}'\end{aligned}$$

Esta matriz $\mathbf{P}$ puede ser utilizada para transformar el modelo:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\mathbf{y} &= \mathbf{P}\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}\mathbf{u} \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} + \tilde{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) (3/4)

Este nuevo modelo satisface todos los supuestos de Gauss-Markov. En particular, nota que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}') &= \mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}' \\ &= \mathbf{I}_n\end{aligned}$$

Entonces, el nuevo modelo puede ser estimado por el más habitual método de los MCO.

Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) (4/4)

Ejercicio

Encuentra los estimadores de MCO del modelo transformado. Muestra que estos son insesgados y que su matriz de covarianzas es:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_b &= \mathbb{E}[(\tilde{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\beta})(\tilde{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\beta})'] \\ &= (\mathbf{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{x})^{-1}\end{aligned}$$

El método de los MCG: Heteroscedasticidad

Ejercicio

Consideremos el modelo:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

Para cada uno de los siguientes casos, encuentra la matriz **P** que nos permite estimar el modelo por MCG.

1. $\mathbb{E}(u_i^2) = \sigma^2 x_i^2$
2. $\mathbb{E}(u_i^2) = \sigma^2 x_i$
3. $\mathbb{E}(u_i^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(y_i)$

Nota. Cuando solo existe heteroscedasticidad, el modelo de los MCG se conoce como el método de los **Mínimos Cuadrados Ponderados** (MCP). ¿Por qué?

El método de los MCG: Autocorrelación (1/2)

Ejercicio

Supongamos que los errores del modelo siguen un proceso autorregresivo de orden 1:

$$\begin{aligned}u_t &= \rho u_{t-1} + \epsilon_t, \\ |\rho| &< 1 \\ \mathbb{E}(u_t) &= \mathbb{E}(u_{t-1}) \\ \epsilon_t &\sim iid \square(0, \sigma_\epsilon^2)\end{aligned}$$

Muestra que la matriz de varianzas y covarianzas del error, $\mathbf{\Omega}$, se calcula como:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

El método de los MCG: Autocorrelación (2/2)

Ejercicio

Supongamos por un momento que:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz $\mathbf{P}$ que nos permitirá utilizar el método de los MCG.

Pista: Utiliza el método de Cholesky para factorizar la matriz $\mathbf{\Omega}$.