

Métodos Cuantitativos

II

Cointegración y el método de corrección de errores

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.05.18

Introducción

Motivación (1/2)

Consideremos el *modelo de demanda de dinero*:

$$m_t = \beta_0 + \underset{=1}{\beta_1} p_t + \underset{>0}{\beta_2} y_t + \underset{<0}{\beta_3} r_t + e_t$$

donde:

m_t : Demanda de dinero

p_t : Nivel de precios

y_t : Ingreso real

r_t : Tasa de interés real

e_t : Término de error

La teoría económica sugiere que la demanda de dinero real, m_t , no debería desviarse permanentemente de su trayectoria. ¡Esto implica que el término de error e_t debe ser *estacionario*!

Motivación (2/2)

En el ejemplo anterior, si aplicamos pruebas de raíz unitaria (es decir, un análisis de estacionariedad) a m_t , p_t , y_t y r_t , lo más probable es que todas sean $I(1)$. Entonces:

$$e_t = m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t + \beta_3 r_t$$

Es decir, el término de error e_t , que es estacionario, resulta de una combinación lineal de variables no estacionarias.

Cointegración

Equilibrio de largo plazo

Del ejemplo anterior podemos deducir la definición de **cointegración**.

Primero, diremos que un conjunto de variables económicas se encuentra en *equilibrio de largo plazo* cuando existe una combinación lineal de estas tal que:

$$\begin{aligned}\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k &= \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} \\ &= 0,\end{aligned}$$

Error de equilibrio

Aunque idealmente $\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} = 0$, en la práctica puede ocurrir que:

$$\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} = e_t$$

El término e_t es el **error de equilibrio**. Este puede reflejar *desviaciones transitorias* del punto de equilibrio. Si este es el caso y $e_t \sim I(0)$, decimos que las variables del vector $\mathbf{x}$ tienen una relación *estadística* de largo plazo.

Cointegración (1/2)

Las variables del vector $\mathbf{x}$ están *cointegradas de orden (d, b)* si:

1. Todos sus componentes están integradas de orden d , $x_i \sim I(d)$;
2. Existe un vector $\boldsymbol{\beta}$ tal que la combinación lineal $\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} \sim I(d - b)$ con $b > 0$.

El vector $\boldsymbol{\beta}$ se denomina **vector de cointegración**.

Cointegración (2/2)

Nota

- Si $\mathbf{x}$ tiene k componentes no estacionarios, pueden existir hasta $h < k$ vectores de cointegración linealmente independientes.
- El número h se conoce como **rango de cointegración**.

Ejemplos (1/2)

En nuestro ejemplo de demanda de dinero, un vector de cointegración es:

$$\beta_1 = (1 \quad -\beta_0 \quad -\beta_1 \quad -\beta_2 \quad -\beta_3)$$

Sin embargo, supongamos que existe una regla de política económica (monetaria) tal que:

$$\begin{aligned} \uparrow m_t &\rightarrow \downarrow (p_t + y_t) \\ \downarrow m_t &\rightarrow \uparrow (p_t + y_t) \end{aligned}$$

En este caso, tenemos un segundo vector de cointegración:

$$\beta_2 = (1 \quad -\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad 0)$$

Ejemplos (2/2)

Ejercicio

Considera el siguiente modelo:

$$y_{1,t} = \gamma y_{2,t} + u_{1t}$$

$$y_{2,t} = y_{2,t-1} + u_{2t}$$

$$u_{it} \sim WN(0, \sigma_i^2); i = 1, 2$$

$$\text{Cov}(u_{it}, u_{it-h}) = 0$$

$$\text{Cov}(u_{it}, u_{jt}) = 0$$

Muestra que $y_{1,t}$ y $y_{2,t}$ están cointegradas. ¿Cuál es el vector de cointegración, β ?

Modelo de corrección de errores (ECM)

Modelo de corrección de errores (1/3)

Considera un *modelo de la estructura temporal de las tasas de interés*:

$$\Delta r_{s,t} = \alpha_s (r_{s,t-1} - \beta r_{l,t-1}) + \sum_{i=1}^p \gamma_{si} \Delta r_{s,t-i} + \sum_{i=1}^p \delta_{si} \Delta r_{l,t-i} + u_{s,t},$$
$$\Delta r_{l,t} = \alpha_l (r_{s,t-1} - \beta r_{l,t-1}) + \sum_{i=1}^p \gamma_{li} \Delta r_{s,t-i} + \sum_{i=1}^p \delta_{li} \Delta r_{l,t-i} + u_{l,t}.$$

Si las tasas son ***I*(1)** y los términos de error son ruidos blancos (posiblemente correlacionados), los términos entre paréntesis deben ser estacionarios. Estos términos representan el error de equilibrio.

Modelo de corrección de errores (2/3)

El modelo anterior nos permite analizar cómo se corrigen los *desequilibrios de corto plazo* en las tasas de interés. Este es un ejemplo de **modelo de corrección de errores (ECM)**.

Nota

Para que el modelo de corrección de errores exista, es necesario que las variables $r_{s,t}$ y $r_{l,t}$ estén cointegradas. En el ejemplo estas están cointegradas de orden $(1, 1)$ y el vector de cointegración es $\begin{pmatrix} 1 & -\beta \end{pmatrix}$.

Modelo de corrección de errores (3/3)

Nota que no existe corrección de errores si:

- las variables no están cointegradas, o
- $\alpha_s = \alpha_l = 0$.

En tal caso, el modelo se reduce a un VAR para las primeras diferencias de $r_{s,t}$ y $r_{l,t}$. Esto es, un VAR para $\Delta r_{s,t}$ y $\Delta r_{l,t}$.

Procedimiento de Engle–Granger

Procedimiento de Engle–Granger

Consideremos dos variables, y_t y z_t , posiblemente $I(1)$. El procedimiento de Engle y Granger consta de cuatro pasos.

Paso 1

Confirmar el orden de integración de y_t y z_t :

- Si las dos variables son efectivamente $I(1)$ continuamos al paso 2.
- Si las dos variables están integradas de diferente orden, podemos concluir que no están cointegradas.
- Si las dos variables son $I(0)$ (estacionarias) ajustamos a cada una de ellas un modelo del tipo ARMA.

Paso 2

Estimar la relación de largo plazo entre y_t y z_t :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t.$$

Para que exista cointegración, es necesario que el término u_t sea estacionario. Para esto, y dado que u_t es desconocido, aplicamos una prueba de Dickey-Fuller (aumentada) al término:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

Nota. En la prueba de DF, usamos las **tablas de Engle-Granger** en lugar de las de DF.

Paso 3

Si y_t y z_t están cointegradas, el ECM (como un VAR restringido):

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \alpha_1 + \alpha_y (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1}) + \sum_{i=1}^p a_{1,1}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p a_{1,2}(i) \Delta z_{t-i} + \varepsilon_{y,t} \\ \Delta z_t &= \alpha_2 + \alpha_z (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1}) + \sum_{i=1}^p a_{2,1}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p a_{2,2}(i) \Delta z_{t-i} + \varepsilon_{z,t}\end{aligned}$$

Engle–Granger sugieren sustituir $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1}$ por $\hat{e}_{t-1}$ obtenido en el paso 2.

Paso 4

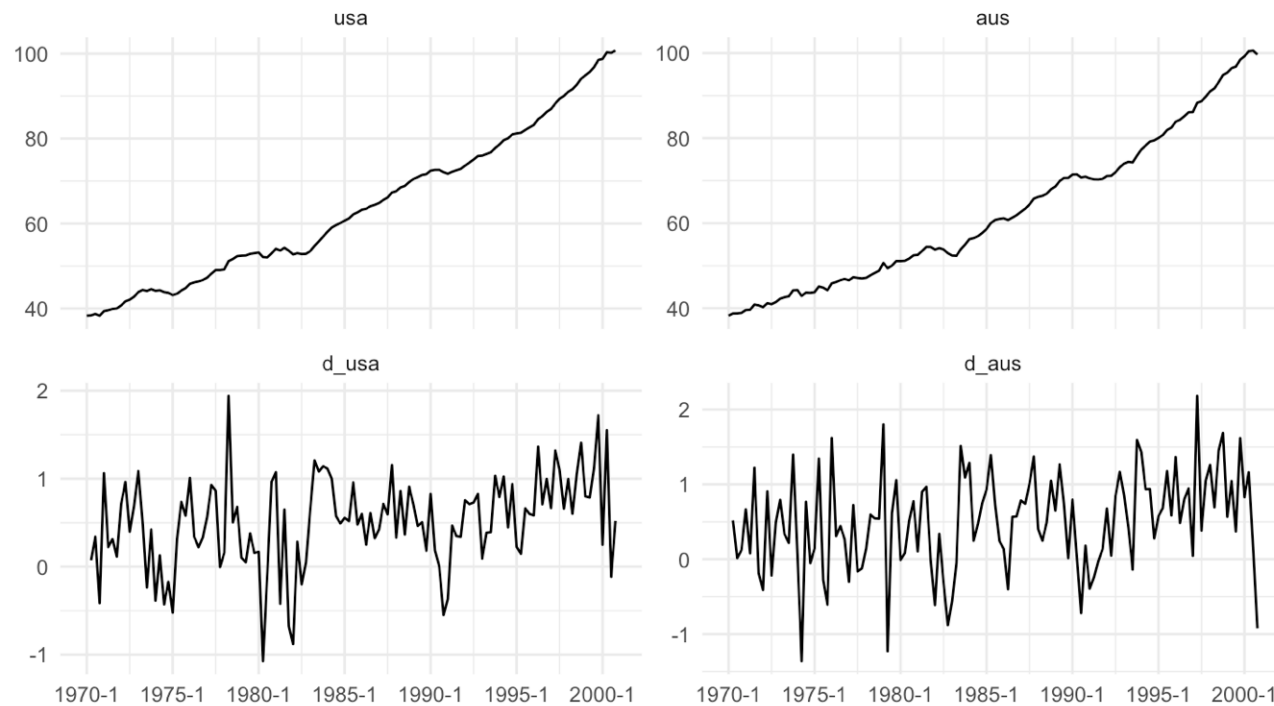
Revisamos si el modelo es adecuado:

- Revisamos si los residuales del modelo son ruidos blancos.
- Revisamos la estimación de las velocidades de ajuste. Si estos son estadísticamente iguales a cero, concluimos que no existe un ECM.
- Si el ECM es válido, podemos calcular las funciones de impulso-respuesta y descomposición de la varianza para analizar el comportamiento del modelo.

Ejemplo (1/9)

Consideremos al Producto Interno Bruto de Estados Unidos (USA) y de Australia (AUS).

PIB real USA y Australia: niveles y primeras diferencias



Ejemplo (2/9)

El primer paso del procedimiento de Engle-Granger consiste en confirmar el orden de integración de ambas series. Una prueba de Dickey-Fuller (para un modelo con tendencia y un rezago) indica que la serie $USA \sim I(1)$:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -8.0085 32.0712
```

```
##      1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.46 -2.88 -2.57
## phi1  6.52  4.63  3.81
```

Ejemplo (3/9)

De igual forma, una prueba de Dickey-Fuller (para un modelo con tendencia y un rezago). indica que la serie $AUS \sim I(1)$:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -9.4353 44.5326
```

```
##      1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.46 -2.88 -2.57
## phi1  6.52  4.63  3.81
```

Ejemplo (4/9)

El segundo paso del procedimiento de Engle-Granger comienza estimando la relación de largo plazo entre las series USA y AUS. Aquí estimamos la siguiente relación:

$$aus_t = \beta_0 + \beta_1 usa_t + u_t$$

```
##
## Call:
## lm(formula = aus ~ usa, data = usaus)
##
## Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-2.47448	-0.92582	-0.08206	1.01575	2.65821

```
##
## Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-1.0724	0.4032	-2.659	0.00888 **
usa	1.0010	0.0061	164.090	< 2e-16 ***

```
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.19 on 122 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9955, Adjusted R-squared:  0.9955
## F-statistic: 2.693e+04 on 1 and 122 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ejemplo (5/9)

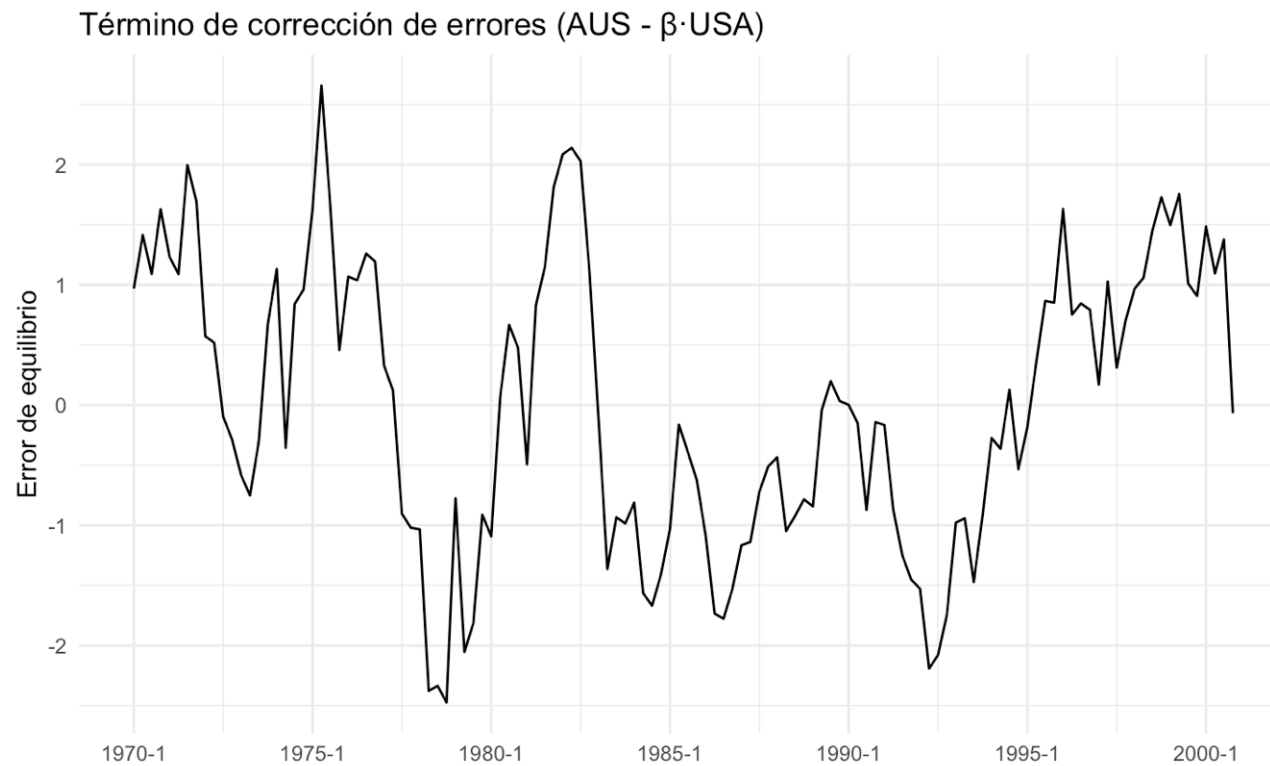
En el Paso 2 del procedimiento de Engle-Granger, tenemos que recuperar el residual de la relación entre las series USA y AUS.

$$e_t = aus_t - b_0 - b_1 usa_t$$

donde b_0 y b_1 son los estimadores de MCO. Para que las series USA y AUS estén cointegradas, es necesario que este residual se comporte como un ruido blanco (esto es, una serie estacionaria: $e_t \sim I(0)$).

Ejemplo (6/9)

Graficamos el término de corrección de errores, e_t . ¿Parece un ruido blanco?



Ejemplo (7/9)

Una prueba de Dickey-Fuller aumentada aplicada a e_t , indica que este es, de hecho, estacionario:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -3.0511
```

```
##      1pct  5pct 10pct
## tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

Ejemplo (8/9)

Finalmente, dado que las series USA y AUS parecen estar cointegradas, estimamos el modelo de corrección de errores. Este es el Paso 3 del procedimiento de Engle-Granger. Para la serie AUS tenemos:

```
##
## Call:
## lm(formula = d_aus ~ 1 + ehat_l1, data = usaus_ecm)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.8348 -0.4084  0.0011  0.3905  1.7042
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.49963    0.05688   8.784 1.25e-14 ***
## ehat_l1       -0.13862    0.04798  -2.889  0.00458 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.6308 on 121 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.06453,    Adjusted R-squared:  0.0568
## F-statistic: 8.347 on 1 and 121 DF,  p-value: 0.004578
```

Ejemplo (9/9)

El modelo de corrección de errores para USA es:

```
##
## Call:
## lm(formula = d_usa ~ 1 + ehat_l1, data = usaus_ecm)
##
## Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-1.58073	-0.28634	0.01296	0.33653	1.43244

```
##
## Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.5074786	0.0466973	10.87	<2e-16 ***
ehat_l1	0.0004075	0.0393911	0.01	0.992

```
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5179 on 121 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  8.845e-07, Adjusted R-squared:  -0.008264
## F-statistic: 0.000107 on 1 and 121 DF, p-value: 0.9918
```

Modelo de corrección de errores vectorial (VECM)

Nota

El modelo de corrección de errores permite describir el ajuste de *una variable* ante desviaciones del equilibrio de largo plazo. Sin embargo, este enfoque tiene dos limitaciones importantes:

- En la práctica, el procedimiento de Engle–Granger se limita a una sola relación de cointegración.
- Modela el ajuste ecuación por ecuación, no como un sistema.

En contextos multivariados, especialmente cuando varias variables interactúan simultáneamente, es natural permitir que *todas* respondan a los desequilibrios de largo plazo. El modelo que permite hacerlo es el **Modelo de Corrección de Errores Vectorial (VECM)**.

