

Métodos Cuantitativos

II

Modelos de Volatilidad

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.04.25

Introducción

Hechos estilizados (1/3)

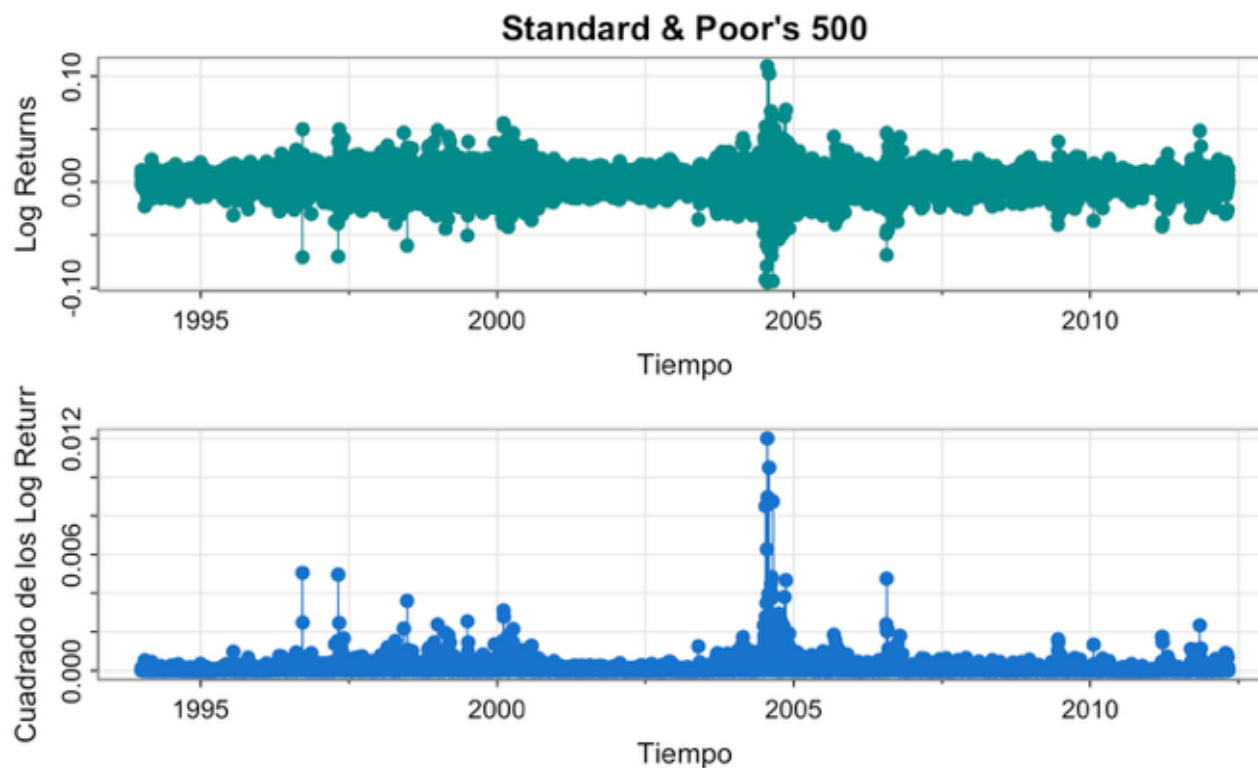
Antes, hemos supuesto que la varianza de los errores, σ^2 , era constante. Sin embargo, las series de tiempo económicas y financieras a menudo violan este supuesto.

Existen dos hechos estilizados clave que motivan la necesidad de modelos de volatilidad.

Hechos estilizados (2/3)

Agrupamiento de Volatilidad (Volatility Clustering)

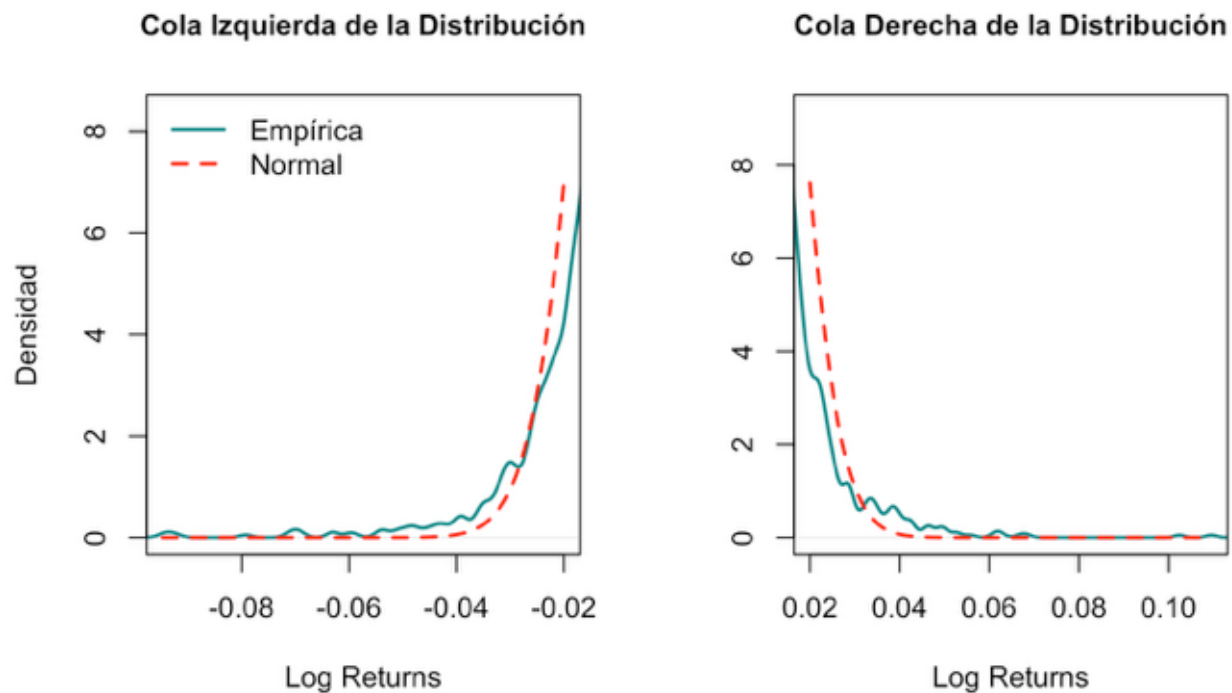
Muchas series financieras exhiben períodos de calma seguidos de períodos de alta turbulencia. Los periodos de alta (baja) turbulencia tienden a agruparse.



Hechos estilizados (3/3)

Colas Pesadas (Leptokurtosis)

Las distribuciones de los rendimientos financieros suelen tener colas más pesadas que una distribución normal: los eventos extremos (grandes caídas o subidas) ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría bajo normalidad.



Heteroscedasticidad condicional

Estos hechos estilizados sugieren que *la varianza no es constante a lo largo del tiempo, sino que depende de la información disponible en el pasado*. Esto es la **heteroscedasticidad condicional**

Modelos ARCH

Modelos ARCH (1/4)

Sea y_t una serie de tiempo que sigue un proceso del tipo:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

donde μ_t es una función del tiempo (por ejemplo, un proceso ARIMA).

Modelos ARCH (2/4)

A diferencia de lo que hemos hecho antes, supondremos ahora que:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim iid(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0; i = 1, \dots, m$$

Modelos ARCH (3/4)

El supuesto anterior implica que, aunque la varianza no condicional de ε_t sigue siendo constante, *la varianza condicional depende de sus valores pasados*. Esto es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-m}) &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 \\ &= h_t\end{aligned}$$

En este caso decimos que:

$$\varepsilon_t \sim \text{ARCH}(m)$$

Modelos ARCH (4/4)

Nota

Para que el proceso que sigue ε_t sea *estacionario*, es necesario que las raíces del polinomio:

$$1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_m L^m = 0$$

se encuentren *fuera del círculo unitario*. Si todos los α_i son no-negativos, esto es equivalente a:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m < 1$$

Además, en este caso, es fácil demostrar que:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i}\end{aligned}$$

Propiedades de los modelos ARCH: Volatility clustering

Los coeficientes α_i actúan como *pesos* que determinan cuánto influyen los choques pasados en la volatilidad actual.

- Si los α_i son grandes, la respuesta de la varianza condicional a los choques es *persistente*.
- Si los α_i son pequeños, los efectos de los choques pasados se disipan rápidamente.

Por ejemplo, consideremos un ARCH(1):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- Si α_1 es grande (cercano a 1), un choque grande en ε_{t-1} aumenta h_t de manera persistente.
- Esto produce el *agrupamiento de volatilidad* observado en los datos financieros.
- Los períodos de alta (baja) varianza tienden a ser seguidos por otros de alta (baja) varianza.

Propiedades de los modelos ARCH: leptokurtosis

Nota que, aun si $v_t \sim N(0, 1)$, los errores ε_t de un modelo ARCH presentan *colas más pesadas* que la normal.

Entonces:

- Los valores grandes de $|\varepsilon_t|$ ocurren con mayor frecuencia de la esperada bajo normalidad.
- Esto se debe a que h_t cambia en el tiempo: los periodos con varianza alta generan choques más grandes.

Nota. La leptocurtosis en los modelos ARCH surge *endógenamente* debido a la variabilidad de h_t . No es necesario suponer una distribución no normal de los errores para obtener colas pesadas.

Modelos GARCH

Modelos GARCH (1/5)

Los modelos ARCH capturan el agrupamiento de volatilidad, pero pueden requerir muchos rezagos para describir adecuadamente la dinámica de la varianza.

Una forma más parsimoniosa de modelar esta dinámica es permitir que la varianza dependa también de sus propios valores pasados.

Modelos GARCH (2/5)

Consideremos un modelo GARCH(1,1):

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t},$$

$$v_t \sim iid(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_1 \geq 0; \beta_1 \geq 0$$

Nota que este modelo combina:

- Efectos ARCH: ε_{t-1}^2
- Persistencia en la volatilidad: h_{t-1}

Modelos GARCH (3/5)

En un modelo GARCH(1,1) la suma $\alpha_1 + \beta_1$ mide la persistencia de la volatilidad:

- Si es pequeña, los choques se disipan rápidamente
- Si es cercana a 1, los choques afectan la volatilidad por mucho tiempo

Además:

$$\alpha_1 + \beta_1 < 1$$

es la condición para que el proceso sea estacionario.

Modelos GARCH (4/5)

En general, un modelo $GARCH(r, m)$ se escribe como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= v_t \sqrt{h_t}, \\ v_t &\sim iid(0, 1) \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \beta_j h_{t-j} \\ \alpha_0 &> 0; \alpha_i \geq 0; \beta_j \geq 0.\end{aligned}$$

Aquí:

- Los términos ε_{t-i}^2 capturan los choques recientes (efectos ARCH).
- Los términos h_{t-j} capturan la persistencia de la volatilidad (efectos GARCH).

Modelos GARCH (5/5)

Nota

Para que el proceso sea estacionario, se requiere:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^r \beta_j < 1.$$

Propiedades de los modelos GARCH: Volatility clustering

Consideremos un GARCH(1, 1):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0.$$

Observa que:

- Un choque grande en ε_{t-1} incrementa h_t .
- A diferencia del modelo ARCH, la volatilidad también depende de su propio pasado h_{t-1} .
- Si $\alpha_1 + \beta_1$ es grande (cercano a 1), este efecto persiste durante varios periodos.
- Los periodos de alta (baja) volatilidad tienden a ser seguidos por otros similares. Esto es el *agrupamiento de volatilidad*.

Nota. El término $\beta_1 h_{t-1}$ extiende la memoria de la volatilidad sin aumentar el número de rezagos del modelo.

Propiedades de los modelos GARCH: leptokurtosis

Al igual que en los modelos ARCH, aun si $v_t \sim N(0, 1)$, los errores ε_t de un modelo GARCH presentan *colas más pesadas* que una distribución normal.

Por ejemplo, para un GARCH(1, 1) tenemos que:

- Los valores grandes de $|\varepsilon_t|$ son más frecuentes que bajo normalidad.
- La leptocurtosis surge endógenamente de la variabilidad de h_t .
- Una mayor persistencia de la volatilidad, es decir, mayores valores de $\alpha_1 + \beta_1$, suele estar asociada con colas más pesadas.

Prueba de efectos ARCH

Efectos ARCH

Antes de aplicar pruebas formales, puede observarse la heteroscedasticidad condicional de manera gráfica. Para esto:

1. Estimamos el modelo para y_t y recuperamos sus residuales: e_t .
2. Examinamos el correlograma de e_t^2 . *Si se observan patrones de agrupamiento o autocorrelaciones significativas, tenemos evidencia de efectos ARCH/GARCH.*

Prueba para los efectos ARCH

Prueba ARCH-LM de Engle (1982). Consideremos un modelo para y_t .

1. Estimamos el modelo y recuperamos sus residuales: e_t .
2. Ahora estimamos:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m e_{t-m}^2 + u_t$$

3. Utilizamos el estadístico TR^2 para probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

$$H_1 : \text{Al menos un } \alpha_i \neq 0$$

$$TR^2 \sim \chi_m^2$$

Nota. La prueba ARCH-LM contrasta la presencia de heteroscedasticidad condicional, sin distinguir entre estructuras ARCH o GARCH.

Estimación y pronósticos, modelos ARCH/GARCH

Estimación de los modelos ARCH/GARCH

Los modelos con efectos ARCH/GARCH se estiman por el *método de máxima verosimilitud*.

En la práctica:

- Se asume una distribución para v_t (normal u otra)
- La estimación se realiza numéricamente
- Naturalmente, el software se hace cargo de todo.

Pronósticos en modelos ARCH/GARCH (1/3)

En los modelos ARCH/GARCH, el objetivo es pronosticar la varianza condicional:

$$\hat{h}_{T+s|T} = \mathbb{E}(h_{T+s} \mid \Omega_T)$$

donde Ω_T es el conjunto de información disponible hasta el tiempo T .

Nota. Estos pronósticos se obtienen de forma recursiva, utilizando la estructura del modelo.

Pronósticos en modelos ARCH/GARCH (2/3)

Para un **ARCH**(1) tenemos que:

- El pronóstico depende de los choques recientes
- Conforme aumenta el horizonte, el pronóstico converge a:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{h}_{T+s|T} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} = \sigma^2$$

- Cuanto mayor sea α_1 , más lentamente se alcanza la convergencia.
- Si α_1 es cercano a 1, los choques afectan la volatilidad por más tiempo.

Pronósticos en modelos ARCH/GARCH (3/3)

Para un *GARCH*(1, 1) tenemos que:

- Conforme aumenta el horizonte, el pronóstico converge a:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{h}_{T+s|T} = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} = \sigma^2$$

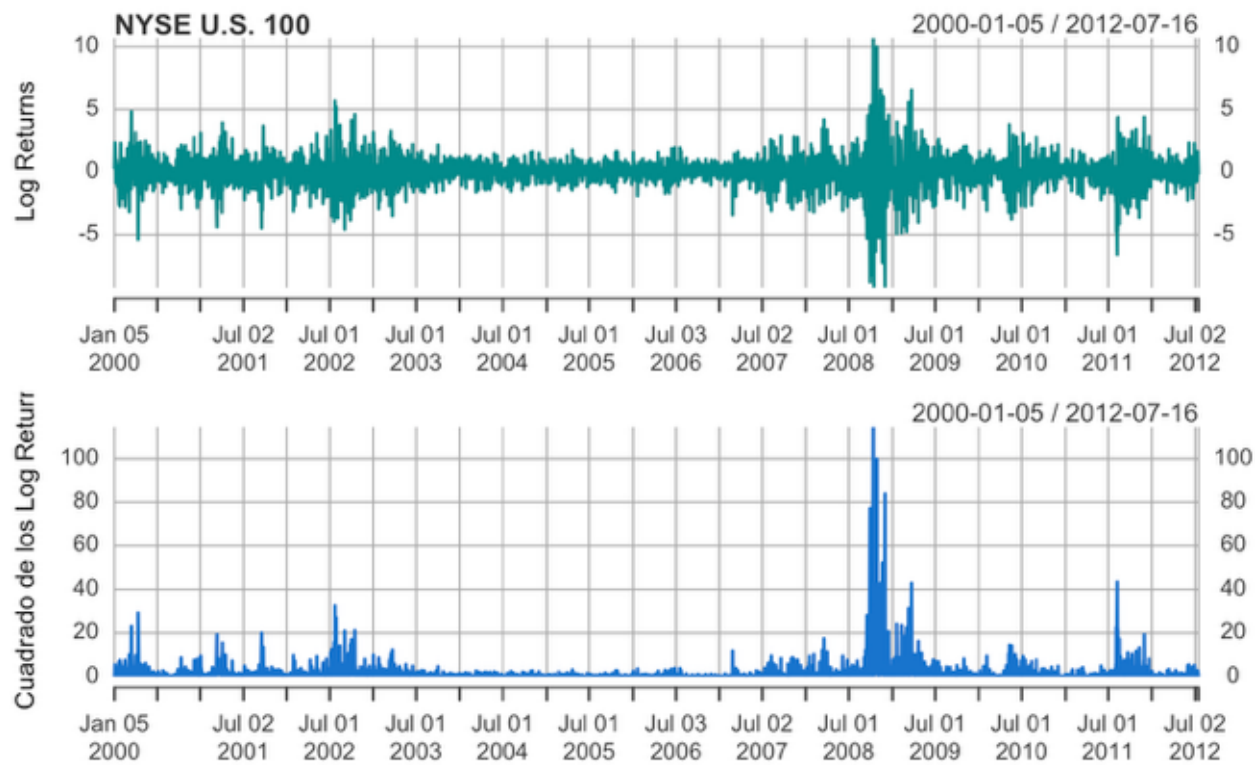
- El término $\alpha_1 + \beta_1$ determina la persistencia de la volatilidad.
- Si $\alpha_1 + \beta_1$ es cercano a 1, los choques se disipan lentamente.

En la práctica, el comportamiento de los pronósticos en GARCH suele ser más realista debido a la persistencia adicional.

Ejemplos

Ejemplo ARCH: NYSE (1/3)

Considera la tasa de rendimiento diario de la NYSE U.S. 100 del 4 de enero del 2000 al 16 de julio del 2012:



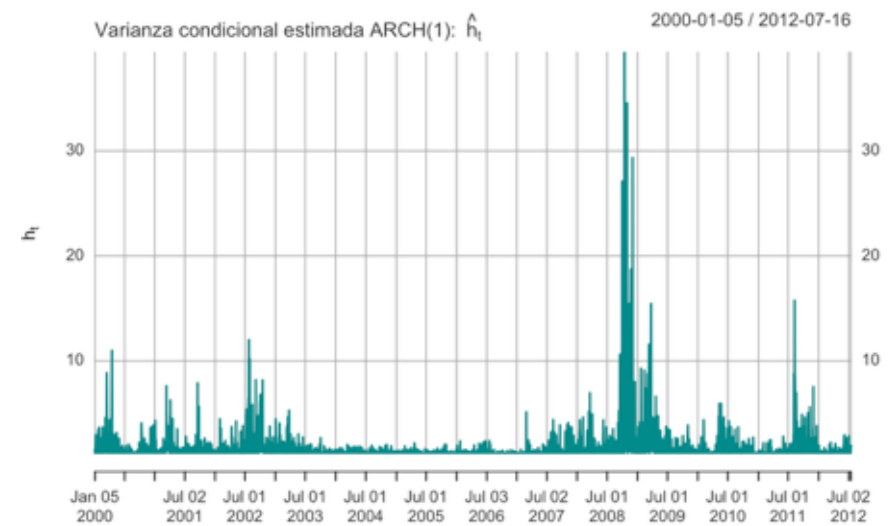
Ejemplo ARCH: NYSE (2/3)

Ajustamos el siguiente modelo:

$$y_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

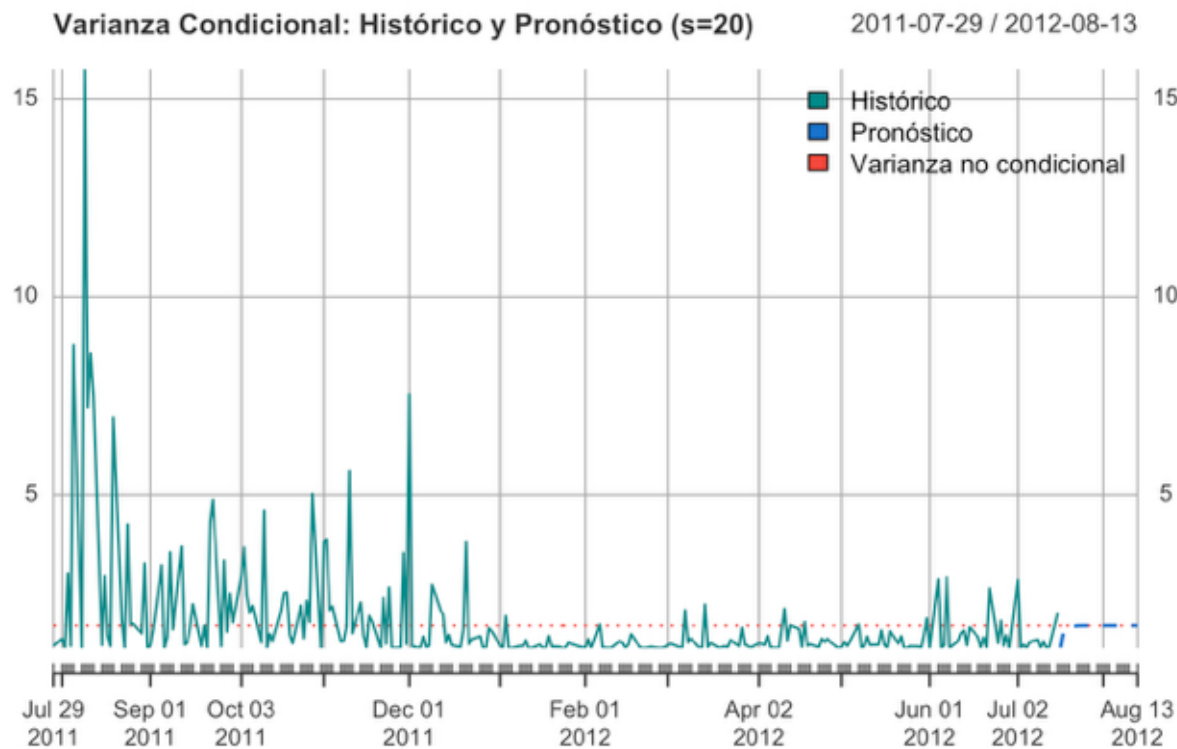
$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$



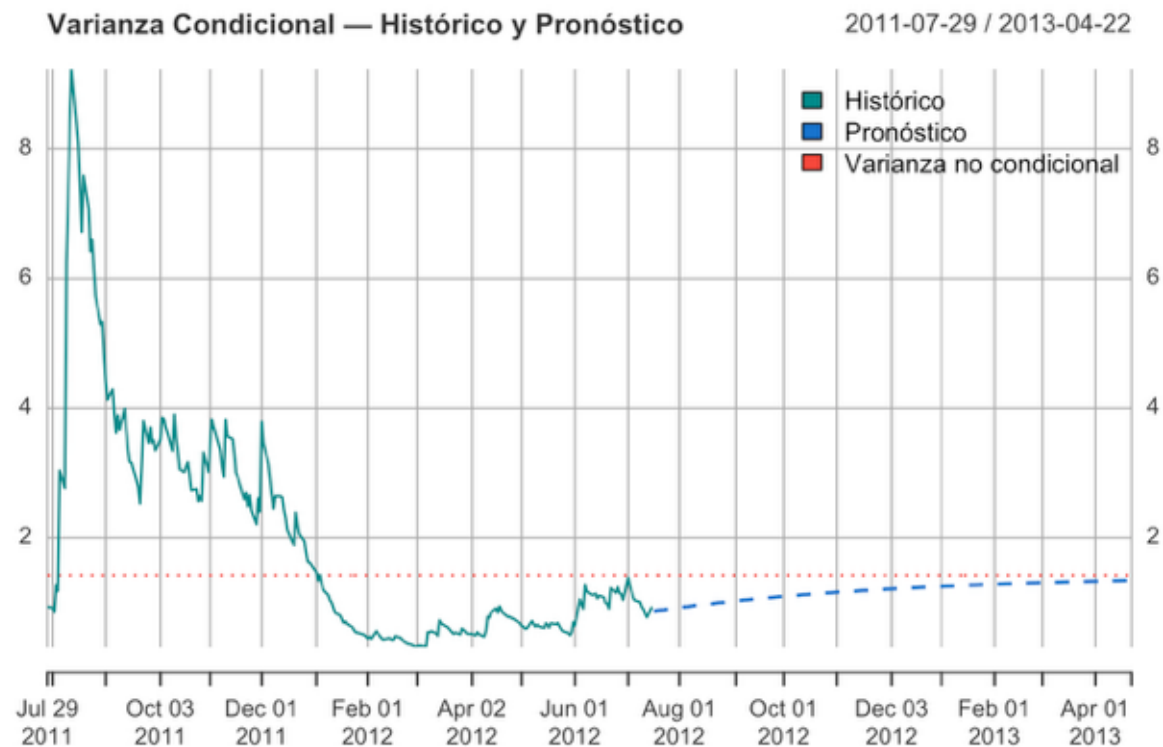
Ejemplo ARCH: NYSE (3/3)

Finalmente, un pronóstico de h_t para $s = 20$ periodos hacia adelante resulta en:



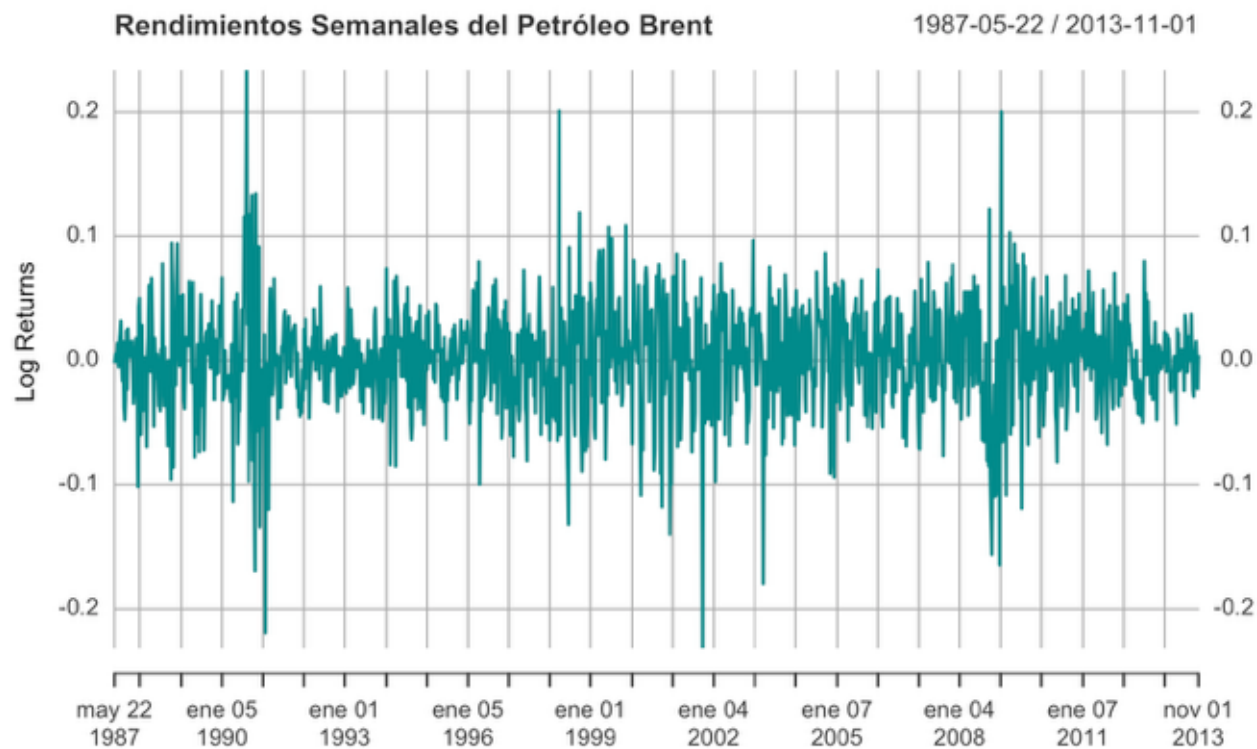
Ejemplo GARCH: NYSE

Considera la tasa de rendimiento diario de la NYSE U.S. 100 del 4 de enero del 2000 al 16 de julio del 2012. Si ahora estimamos un GARCH(1, 1):



Ejemplo GARCH: Brent (1/3)

Considera el rendimiento del precio spot semanal del Brent (15/may/1987–1/nov/2013).



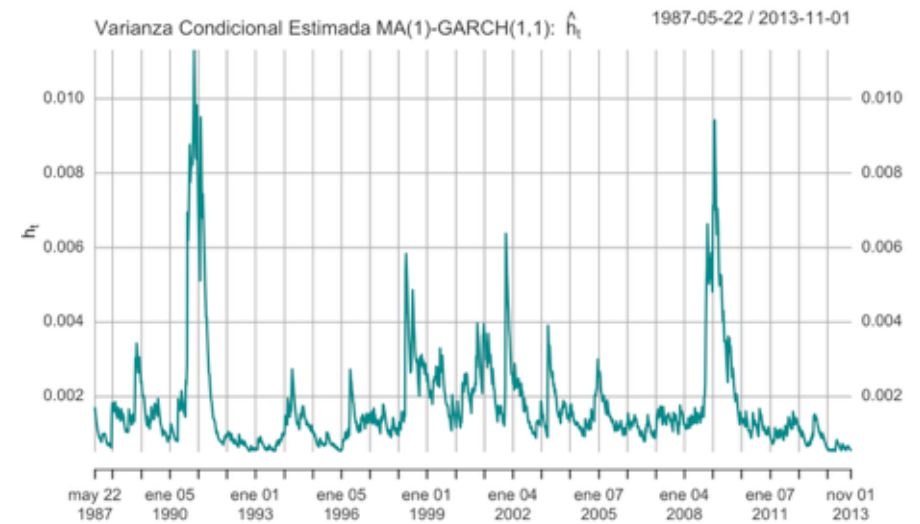
Ejemplo GARCH: Brent (2/3)

Ajustamos el siguiente modelo:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

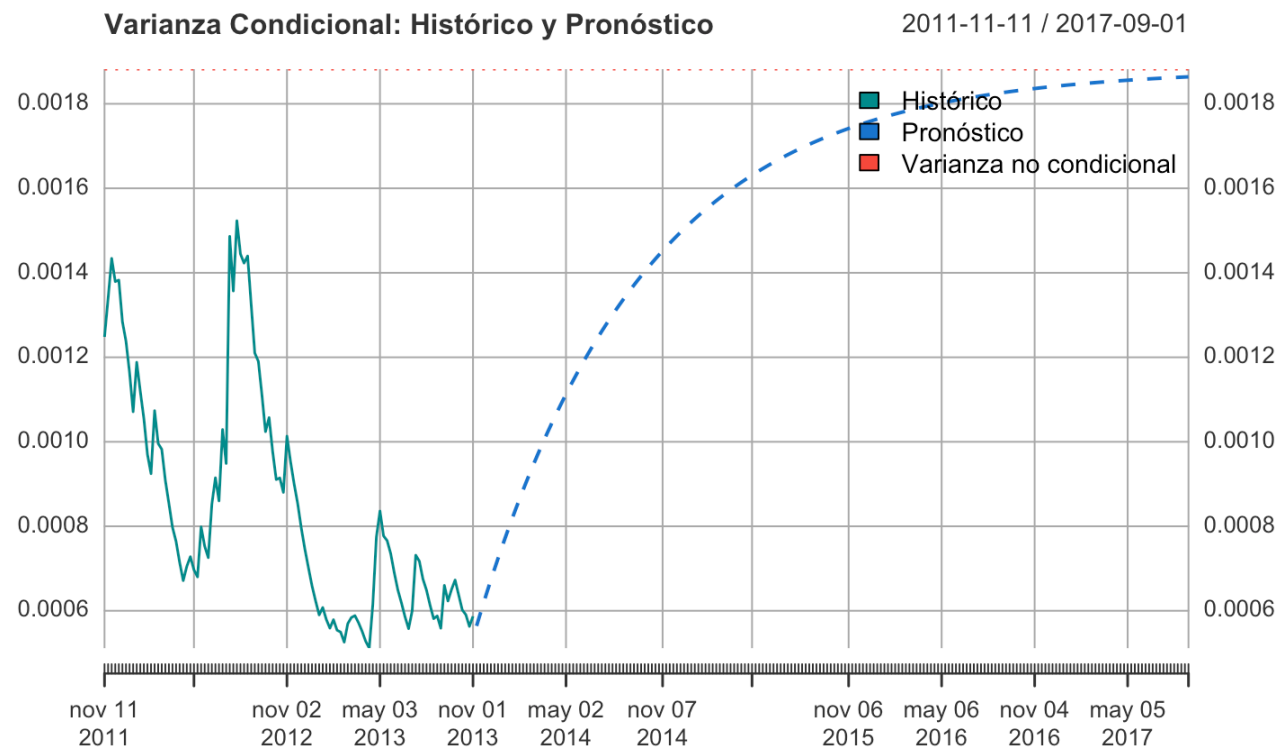
$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$



Ejemplo GARCH: Brent (3/3)

Finalmente, un pronóstico de h_t para $s = 200$ periodos hacia adelante resulta en:



Nota que, a diferencia del del NYSE, aquí volatilidad estimada es más persistente y el pronóstico tarda más en converger a la varianza no condicional.