

Métodos Cuantitativos

II

*Modelos no estacionarios II:
componente estacional*

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.03.20

Introducción

Estacionariedad (1/4)

Recordemos que para que una serie de tiempo, y_t , sea estacionaria (en covarianza), es necesario que:

- Su media y varianza sean constantes. Esto es, para todo $t \in \mathbb{Z}$:

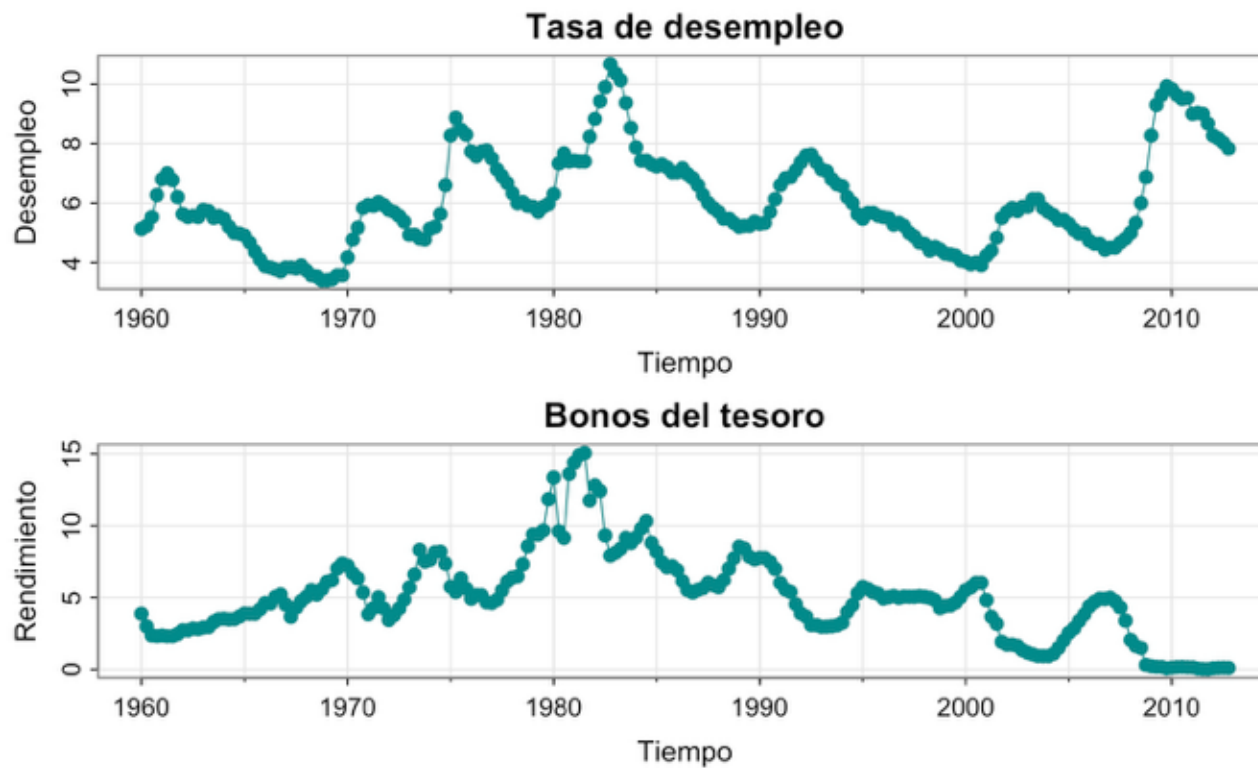
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y_t) &= \mu; \\ \mathbb{V}ar(y_t) &= \gamma_0 < \infty\end{aligned}$$

- Su función de autocovarianza dependa solo del desfase h y no del tiempo t :

$$\gamma(t, \tau) = \gamma(h); \quad h = |t - \tau| \in \mathbb{Z}$$

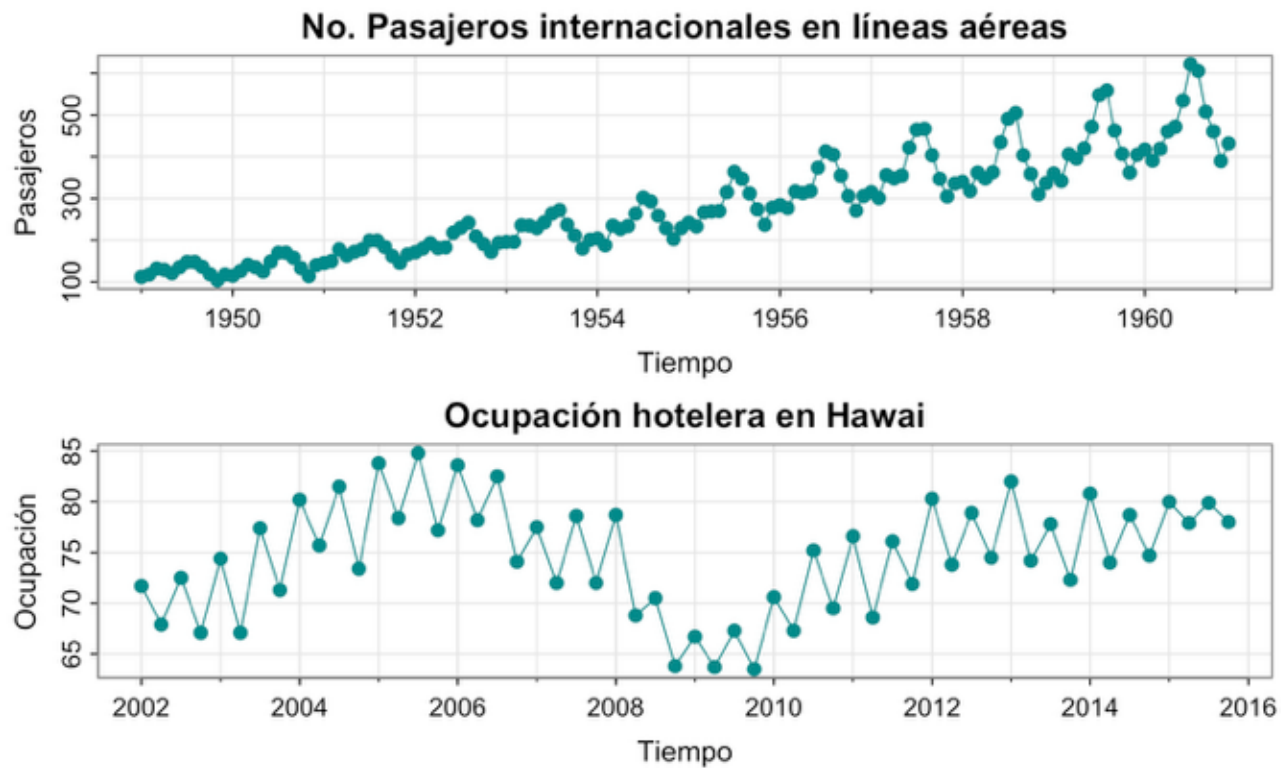
Estacionariedad (2/4)

Las siguientes series de tiempo podrían ser estacionarias:



Estacionariedad (3/4)

¿Qué pasa si las series de tiempo presentan un **patrón estacional**? Por ejemplo:



Estacionariedad (4/4)

Los modelos con patrón estacional violan directamente la condición de estacionariedad, esto es debido a que:

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu_s$$

donde s indica la estación (mes, trimestre, etc.)

Incorporación del componente estacional en el modelo

(1/3)

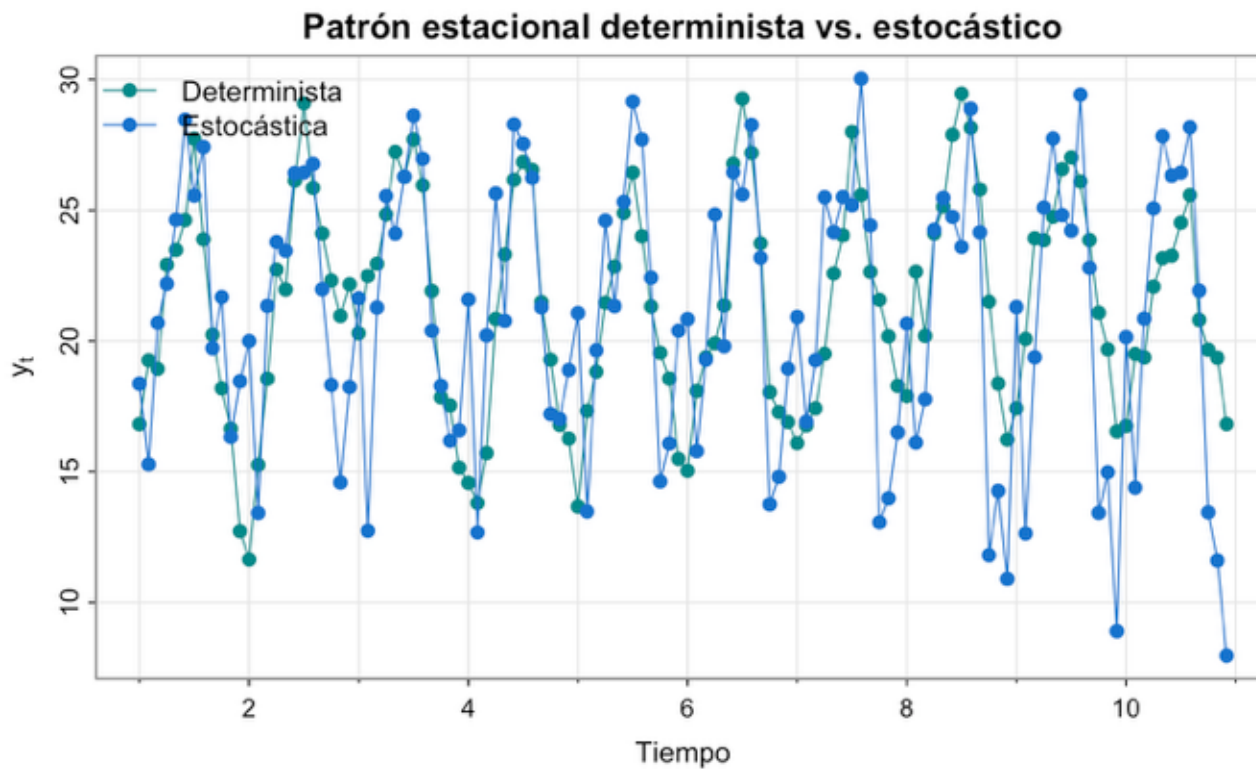
El componente de la serie de tiempo que representa la variabilidad en los datos debida a influencias de las estaciones, se llama **componente estacional**. Existen dos formas diferentes para incorporar este componente en el modelo:

- **Componente determinista**. Incorporamos *explícitamente* en el modelo un patrón estacional.
- **Componente estocástico**. El patrón estacional proviene de una *raíz unitaria estacional*.

Incorporación del componente estacional en el modelo

(2/3)

Componente determinista vs. Componente estocástico



Incorporación del componente estacional en el modelo

(3/3)

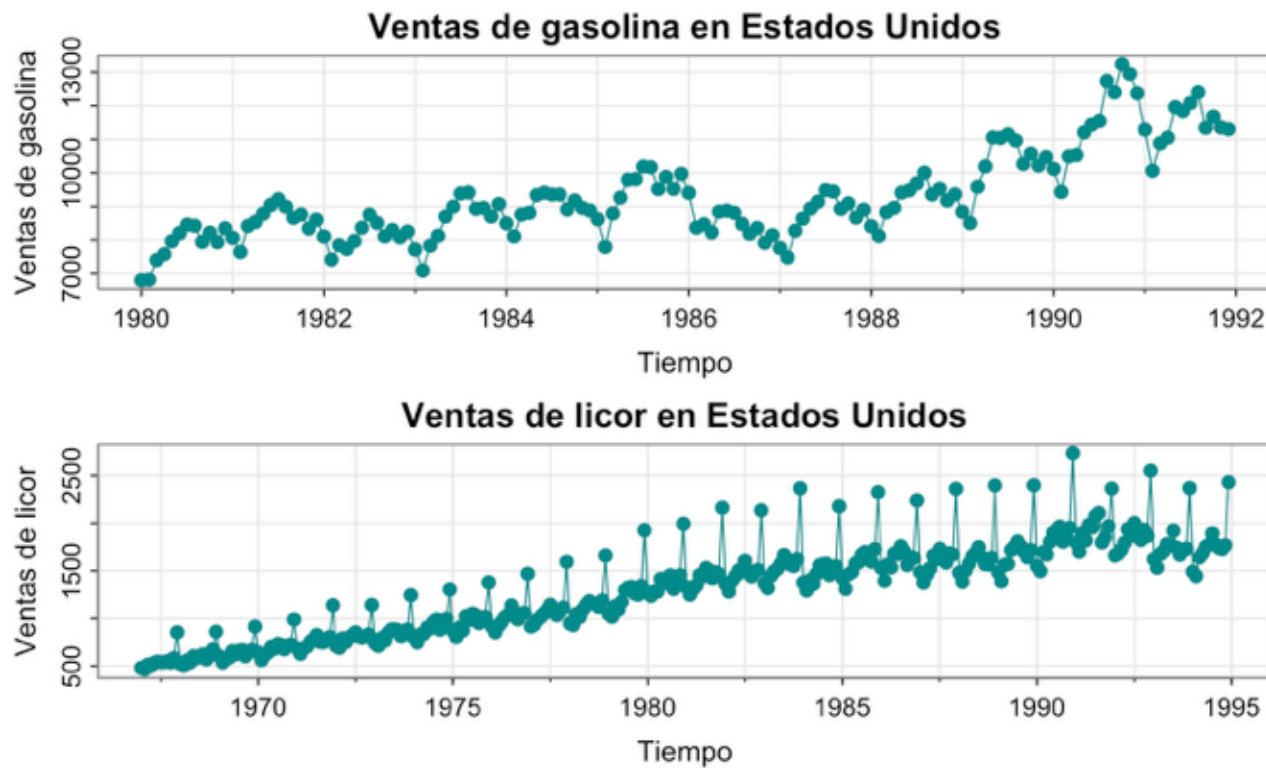
Aunque los dos tipos de componente estacional son visualmente parecidos, las implicaciones teóricas y prácticas son diferentes:

- En un modelo con componente estacional determinista, los shocks tienen *efectos transitorios*. En un modelo con componente estacional estocástico, los shocks tienen *efectos persistentes*.
- El procedimiento para *remover* el componente estacional y hacer la serie estacionaria es distinto para cada caso.

Componente estacional determinista

Componente estacional determinista

Las siguientes series muestran un patrón estacional muy claro:



Modelo estacional puro (1/2)

Para incorporar el componente estacional determinista en el modelo, supongamos que s es el número de estaciones en un año. Debemos construir un conjunto de s **variables dummy estacionales**. Por ejemplo, si $s = 4$ (datos trimestrales):

$$D_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \dots)$$

$$D_2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots)$$

$$D_3 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots)$$

$$D_4 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots)$$

Modelo estacional puro (2/3)

El **modelo estacional puro** es:

$$y_t = \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

Básicamente, tenemos un modelo en el que el intercepto es diferente en cada estación. Los coeficientes γ_i se conocen como **factores estacionales**.

Nota. Como siempre, debemos tener cuidado de no caer en la *trampa de las dummies*.

Modelo estacional con tendencia (1/2)

También podemos incluir una *tendencia determinista* en un modelo estacional. Por ejemplo, si aumentamos el modelo estacional puro con una tendencia lineal tenemos:

$$y_t = \beta_1 t + \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

También es posible tener modelos más complejos:

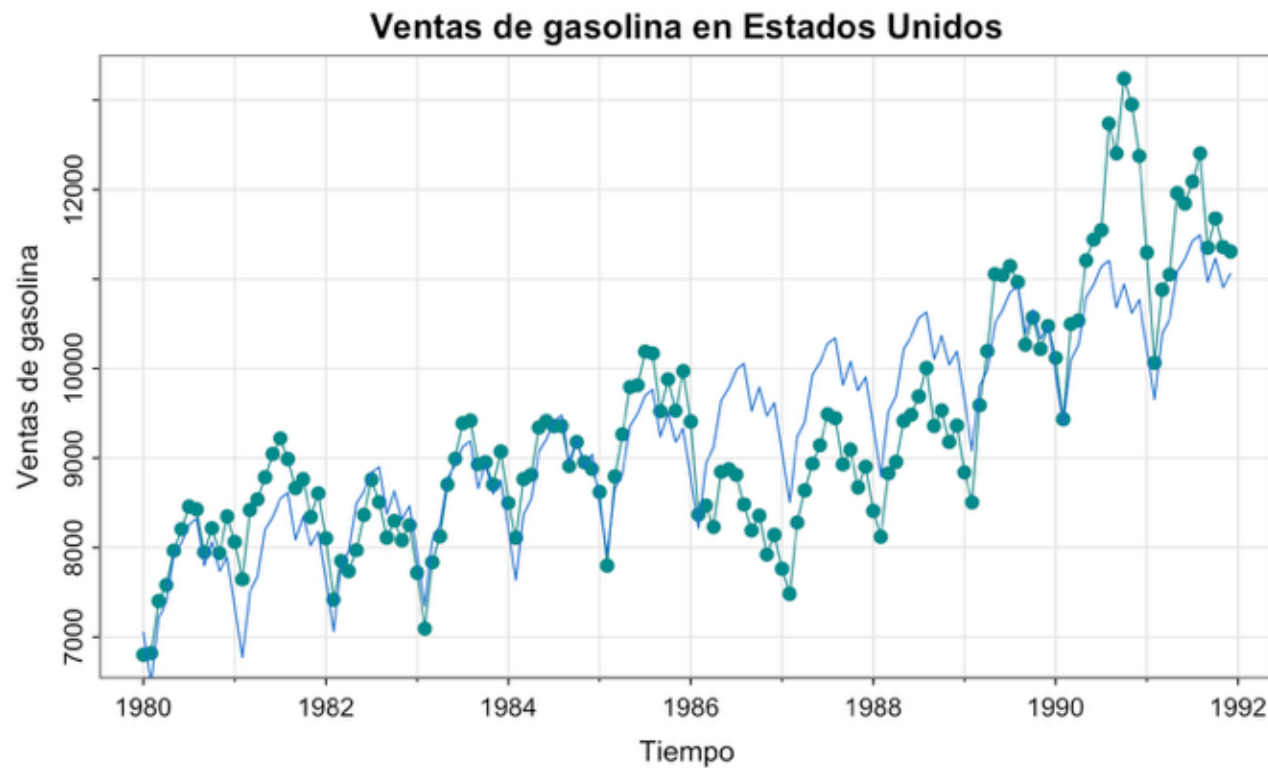
$$y_t = \beta_1 t + \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} + \sum_{i=1}^{v_1} \delta_i^{HD} HDV_{it} + \sum_{i=1}^{v_2} \delta_i^{TD} TDV_{it} + \varepsilon_t$$

donde **HDV** representa periodos de fiesta relevantes, y **TDV** son periodos de comercio relevantes. Estas también son variables dummy.

Los estimadores de los coeficientes de todos estos modelos pueden obtenerse por MCO.

Modelo estacional con tendencia (2/2)

Por ejemplo, considera las ventas de gasolina en Estados Unidos (en dólares):



Ejercicio (1/4)

Ejercicio

Considera el modelo:

$$y_t = \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

Muestra que y_t no es estacionario.

Ejercicio (2/4)

Nota

Considera el modelo:

$$y_t = \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

Una forma de hacer que este modelo sea estacionario, consiste en calcular:

$$\begin{aligned} y_t^* &= y_t - \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} \\ &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

Esta transformación puede hacerse operacional reemplazando los γ_i por sus estimadores de MCO.

Ejercicio (3/4)

Ejercicio

A diferencia de los modelos con tendencia, aplicar diferencias a un modelo con componente estacional no hace que la serie de tiempo sea estacionaria. Por ejemplo, considera el modelo:

$$y_t = \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

Muestra que Δy_t no es estacionario.

Ejercicio (4/4)

Ejercicio

Considera el modelo con datos trimestrales ($s = 4$):

$$y_t = \sum_{i=1}^4 \gamma_i D_{it} + \varepsilon_t$$

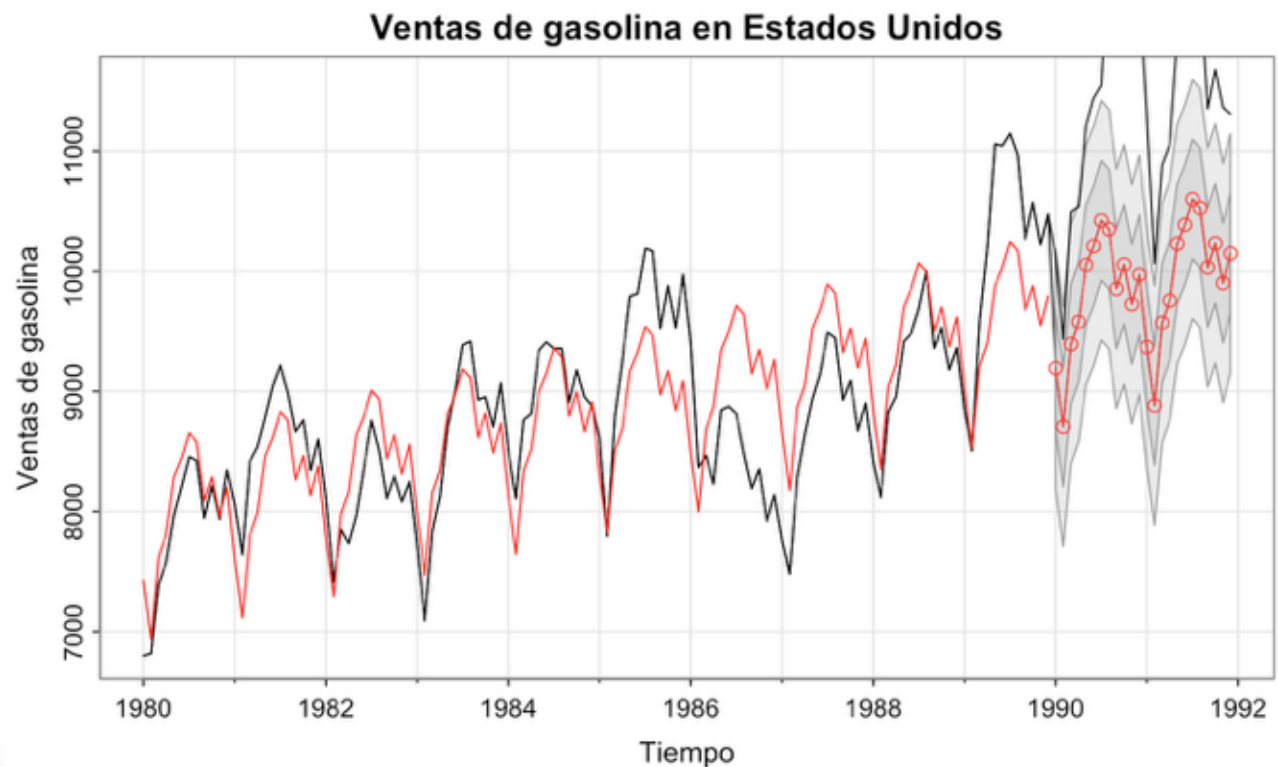
Muestra que $\Delta^4 y_t = y_t - y_{t-4}$ es estacionario. Este es un ejemplo de modelos **ARIMA estacionales**, también conocidos como modelos **SARIMA**.

Nota. Los modelos SARIMA nos permiten tratar la **estacionalidad estocástica**, la cual ocurre cuando *el patrón estacional no es constante sino que evoluciona en el tiempo*.

Ejemplo

Ejemplo

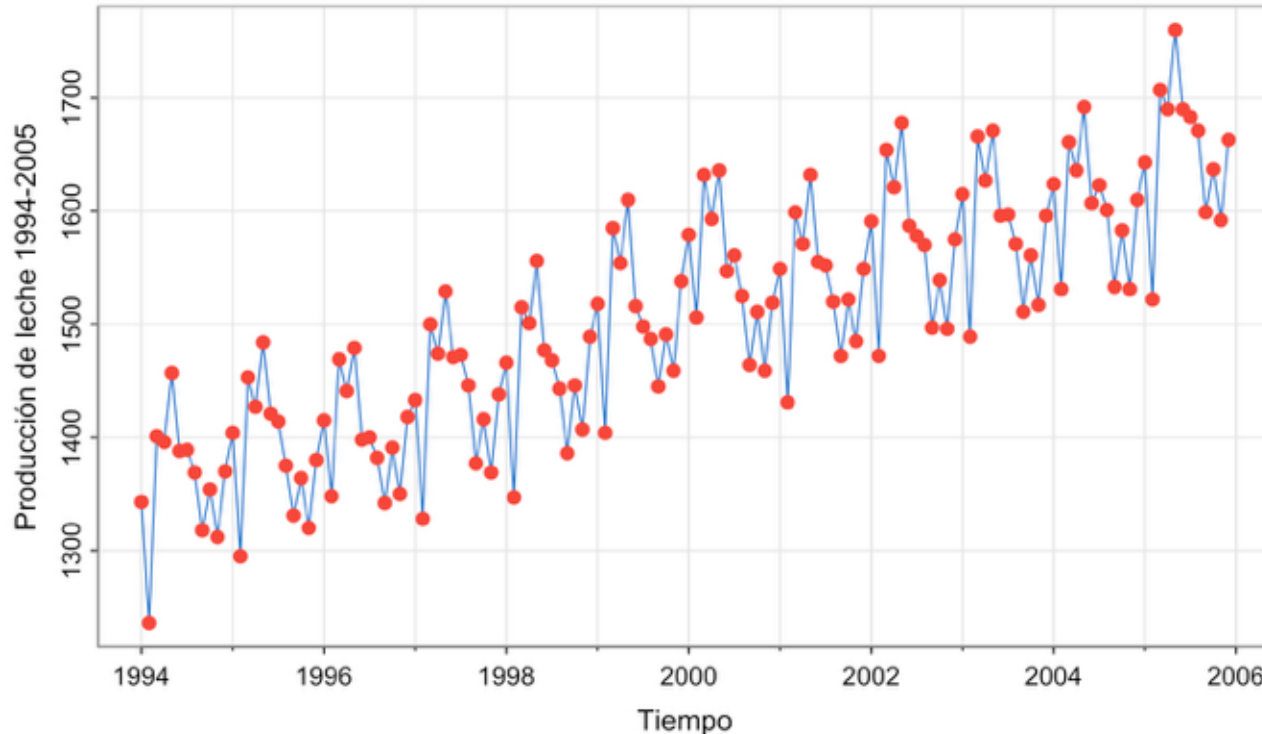
Las técnicas habituales para analizar y pronosticar series de tiempo, aplican también para los modelos con componente estacional (ver modelos ARMA). Por ejemplo, para las ventas de gasolina en Estados Unidos (en dólares) tenemos:



Componente estacional estocástico: Modelos SARMA

Componente estacional estocástico (1/2)

Sea y_t una serie de tiempo que presenta un patrón estacional estocástico. En este caso, la dependencia serial no ocurre en todos los retardos, sino en aquellos que son múltiplos de s . Por ejemplo:



En el caso de la producción de leche en los Estados Unidos (datos mensuales de enero 1994 a diciembre 2005), la dependencia serial ocurre en cada trimestre ($s = 12$). ¿Cómo incorporamos esta estructura en el modelo?

Componente estacional estocástico (2/2)

Para incorporar la dependencia serial en retardos múltiplos de s , podemos extender los modelos ARMA para incluir retardos estacionales.

Modelo $MA(Q)_s$

Una serie de tiempo, y_t sigue un proceso MA estacional (SMA) de orden Q, s o $MA(Q)_s$ si:

$$y_t = \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-s} + \Theta_2 \varepsilon_{t-2s} + \cdots + \Theta_Q \varepsilon_{t-Qs};$$
$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Modelo $MA(1)_{12}$ (1/4)

Por ejemplo, sean $Q = 1$ y $s = 12$. Entonces:

$$y_t = \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-12}$$

En este caso, se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}(y_t) \\ &= 0\end{aligned}$$

Modelo $MA(1)_{12}$ (2/4)

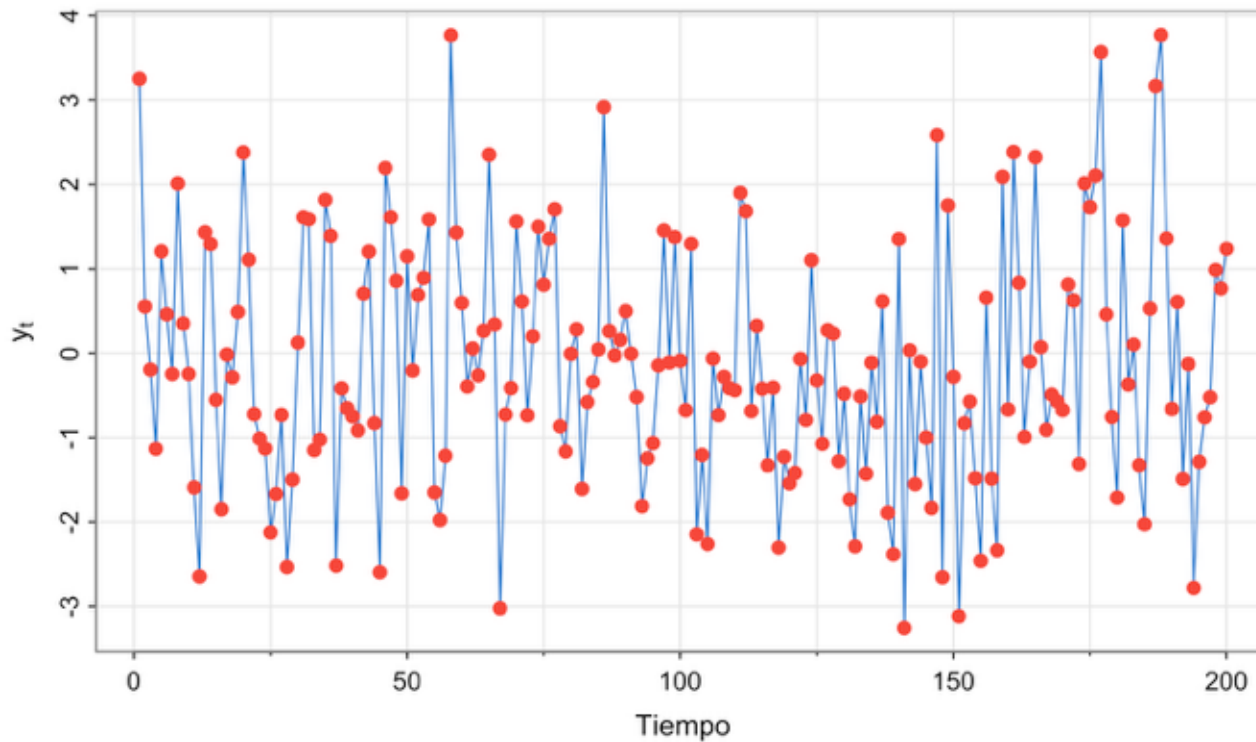
Además:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \Theta_1^2)\sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ \Theta_1\sigma^2 & \text{si } k = 12 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad \rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\Theta_1}{1+\Theta_1^2} & \text{si } k = 12 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Entonces, un proceso $MA(1)_{12}$ es estacionario.

Modelo $MA(1)_{12}$ (3/4)

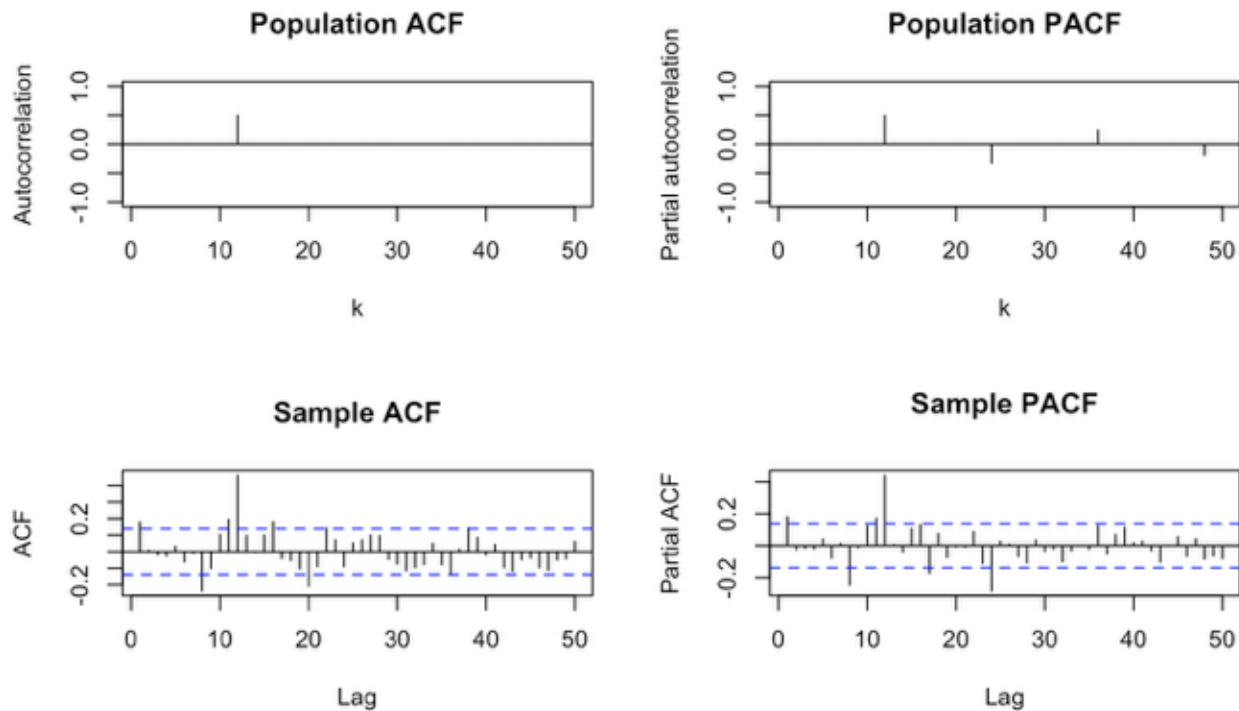
Los siguientes datos simulan un proceso $MA(1)_{12}$:



Nota que este proceso es equivalente a un $MA(12)$ con $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{11} = 0$.

Modelo $MA(1)_{12}$ (4/4)

Para este proceso tenemos:



Modelo $MA(2)_{12}$ (1/2)

Ahora, sean $Q = 2$ y $s = 12$. Entonces:

$$y_t = \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-12} + \Theta_2 \varepsilon_{t-24}$$

Se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}(y_t) \\ &= 0\end{aligned}$$

Modelo $MA(2)_{12}$ (2/2)

Además:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2)\sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ (\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2)\sigma^2 & \text{si } k = 12 \\ \Theta_2\sigma^2 & \text{si } k = 24 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} & \text{si } k = 12 \\ \frac{\Theta_2}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} & \text{si } k = 24 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Nota que este proceso es equivalente a un $MA(24)$ con $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{11} = \theta_{13}, \theta_{14}, \dots, \theta_{23} = 0$.

Modelo $AR(P)_s$

Una serie de tiempo, y_t sigue un proceso AR estacional (SAR) de orden P, s o $AR(P)_s$ si:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \cdots + \Phi_P y_{t-Ps} + \varepsilon_t;$$
$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Modelo $AR(1)_{12}$ (1/4)

Por ejemplo, sea $P = 1$ y $s = 12$. Entonces:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \varepsilon_t; \quad |\Phi_1| < 1$$

En este caso, se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}(y_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Modelo $AR(1)_{12}$ (2/4)

Además:

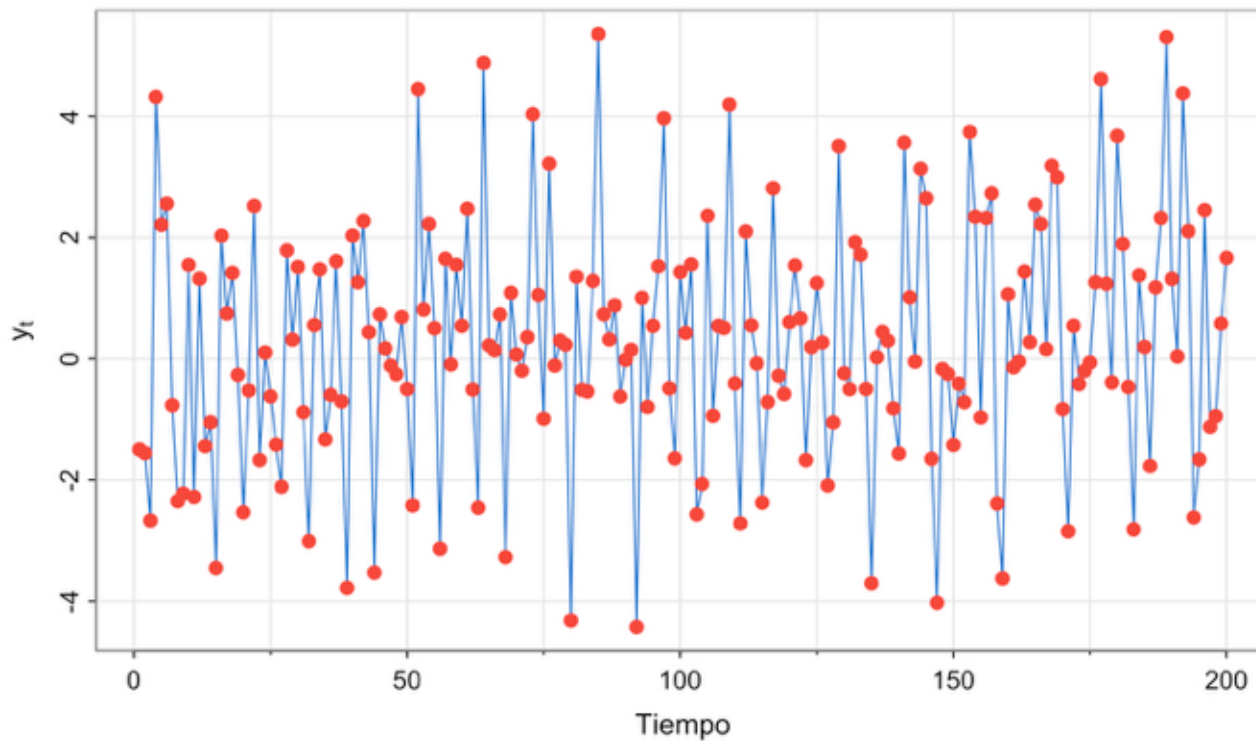
$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \Phi_1^2}$$

y:

$$\rho_k = \begin{cases} \Phi_1^{k/12} & \text{si } k = 0, 12, 24, \dots \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Modelo $AR(1)_{12}$ (3/4)

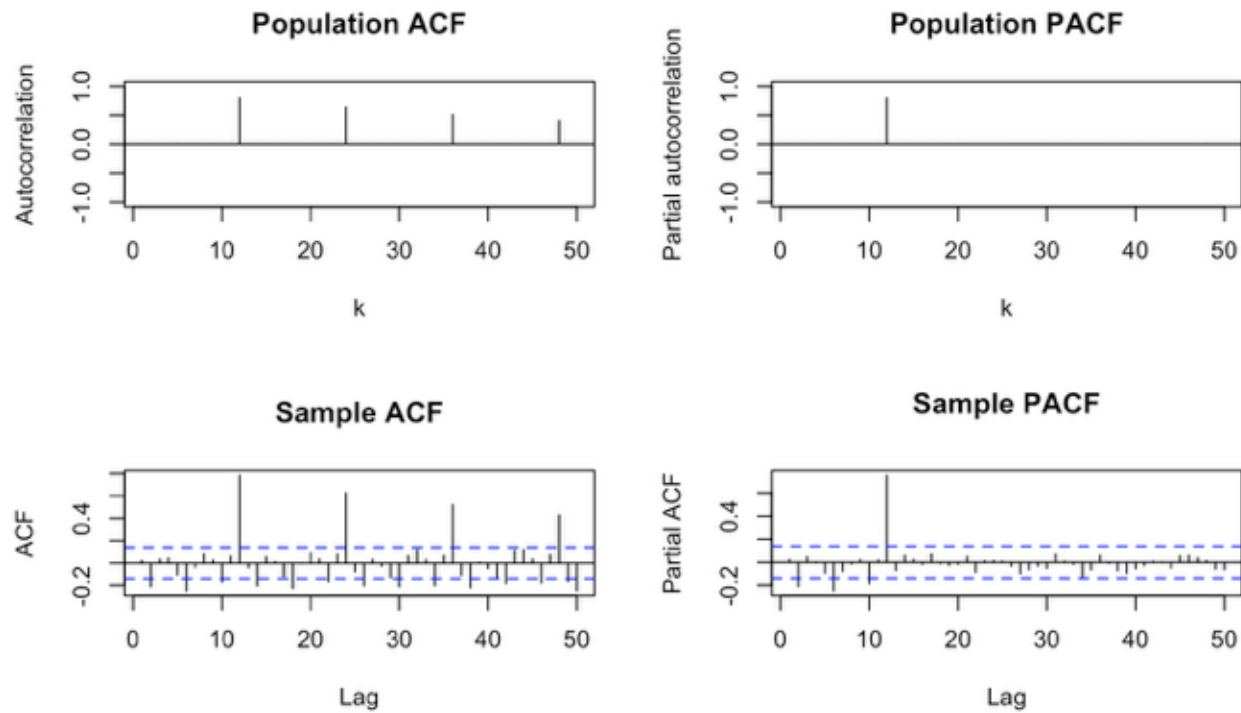
Los siguientes datos simulan un proceso $AR(1)_{12}$:



Nota que este proceso es equivalente a un $AR(12)$ con $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{11} = 0$.

Modelo $AR(1)_{12}$ (4/4)

Para este proceso tenemos:



Modelo $AR(2)_{12}$

Para un proceso $AR(2)_{12}$ se pide demostrar que:

- La función de autocorrelación decrece exponencialmente u oscilatoriamente en los retardos:
 $k = 12, 24, 36, 48, \dots$
- La función de autocorrelación parcial es diferente de cero en los retardos $k = 12$ y $k = 24$. Es cero en todos los demás valores de k .
- Un proceso $AR(2)_{12}$ es equivalente a un $AR(24)$ con $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{11} = \phi_{13}, \phi_{14}, \dots, \phi_{23} = 0$.

Modelo $ARMA(P, Q)_s$ (1/2)

Una serie de tiempo, y_t sigue un proceso ARMA estacional (SARMA) de orden P, Q, s o $ARMA(P, Q)_s$ si:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \cdots + \Phi_P y_{t-Ps} + \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-s} + \Theta_2 \varepsilon_{t-2s} + \cdots + \Theta_Q \varepsilon_{t-Qs};$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Modelo $ARMA(P, Q)_s$ (2/2)

Un proceso $ARMA(P, Q)_s$:

- Es equivalente a un $ARMA(p, q)$ con autocorrelaciones diferentes de cero en los retardos $k = s, 2s, 3s, \dots$
- Es estacionario si y solo si las raíces del polinomio $\Phi_P(L^s) = 0$ se encuentran *fuera del círculo unitario*.
- Es invertible si y solo si las raíces del polinomio $\Theta_Q(L^s) = 0$ se encuentran *fuera del círculo unitario*.

Modelos SARMA Multiplicativos

Modelos SARMA Multiplicativos

Un proceso con componente estacional multiplicativo implica, como su nombre lo indica, multiplicar un proceso $ARMA(p, q)$ por un proceso $SARMA(P, Q)_s$.

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ (1/4)

Considera un proceso $MA(1)$:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= (1 + \theta_1 L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

Y considera un proceso $MA(1)_{12}$:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-s} \\ &= (1 + \Theta_1 L^{12}) \varepsilon_t \end{aligned}$$

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ (2/4)

Entonces, un proceso $MA(1) \times MA(1)_{12}$:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})\varepsilon_t \\ &= (1 + \theta_1 L + \Theta_1 L^{12} + \theta_1 \Theta_1 L^{13})\varepsilon_t \end{aligned}$$

O, de forma equivalente:

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \Theta_1 \varepsilon_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-13}$$

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ (3/4)

Para este proceso, se puede demostrar que:

$$\mathbb{E}(y_t) = 0$$

Y que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & \rho_{11} &= \frac{\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)} \\ \rho_{12} &= \frac{\Theta_1}{1+\Theta_1^2} & \rho_{13} &= \frac{\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)} \end{aligned}$$

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ (4/4)

Entonces, un proceso $MA(1) \times MA(1)_{12}$:

- Tiene una FAC que es diferente de cero para los retardos $k = 1$ y $k = 12$.
- Tiene una FAC que es diferente de cero para los retardos $k = 11$ y $k = 13$.
- Es matemáticamente equivalente a un $MA(13)$ con parámetros: $\theta_1 = \theta_1, \theta_2 = \theta_2 = \dots = \theta_{11} = 0$ y $\theta_{13} = \Theta_1$.

$MA(1) \times AR(1)_{12}$ (1/3)

Considera un proceso $MA(1)$:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= (1 + \theta_1 L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

Y considera un proceso $AR(1)_{12}$:

$$\begin{aligned} y_t &= \Phi_1 y_{t-12} + \varepsilon_t \\ (1 - \Phi_1 L^{12}) y_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

$MA(1) \times AR(1)_{12}$ (2/3)

Entonces, un proceso $MA(1) \times AR(1)_{12}$:

$$(1 - \Phi_1 L^{12})y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

O, de forma equivalente:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-12} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

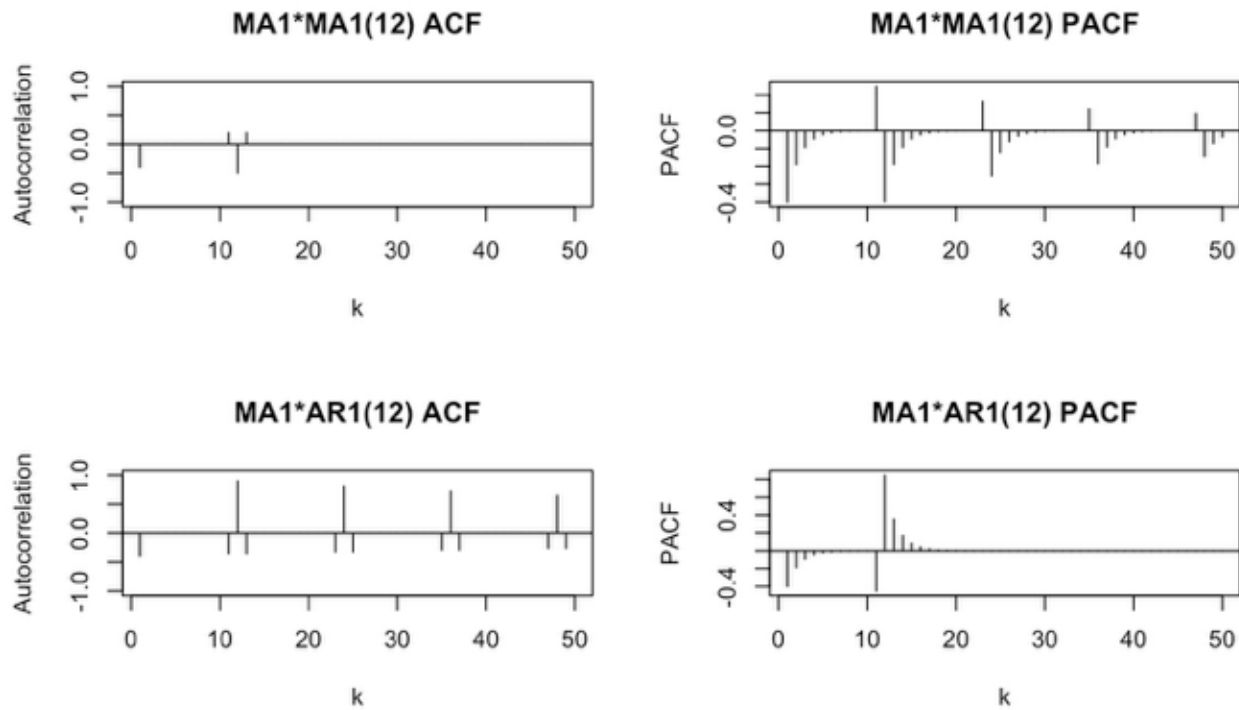
$MA(1) \times AR(1)_{12}$ (3/3)

Entonces, un proceso $MA(1) \times AR(1)_{12}$:

- Tiene una FAC que es del tipo AR en los retardos $k = 12, 24, 26 \dots$
- Tiene una FAC que es del tipo MA en el retardo $k = 1$ y en $k = 11, 13, 25, \dots$
- Es matemáticamente equivalente a un $ARMA(12, 1)$ con parámetros: $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{11} = 0, \phi_{12} = \Phi_1$ y $\theta_1 = \theta_1$.

FAC y FACP

Para los procesos multiplicativos que hemos visto tenemos:



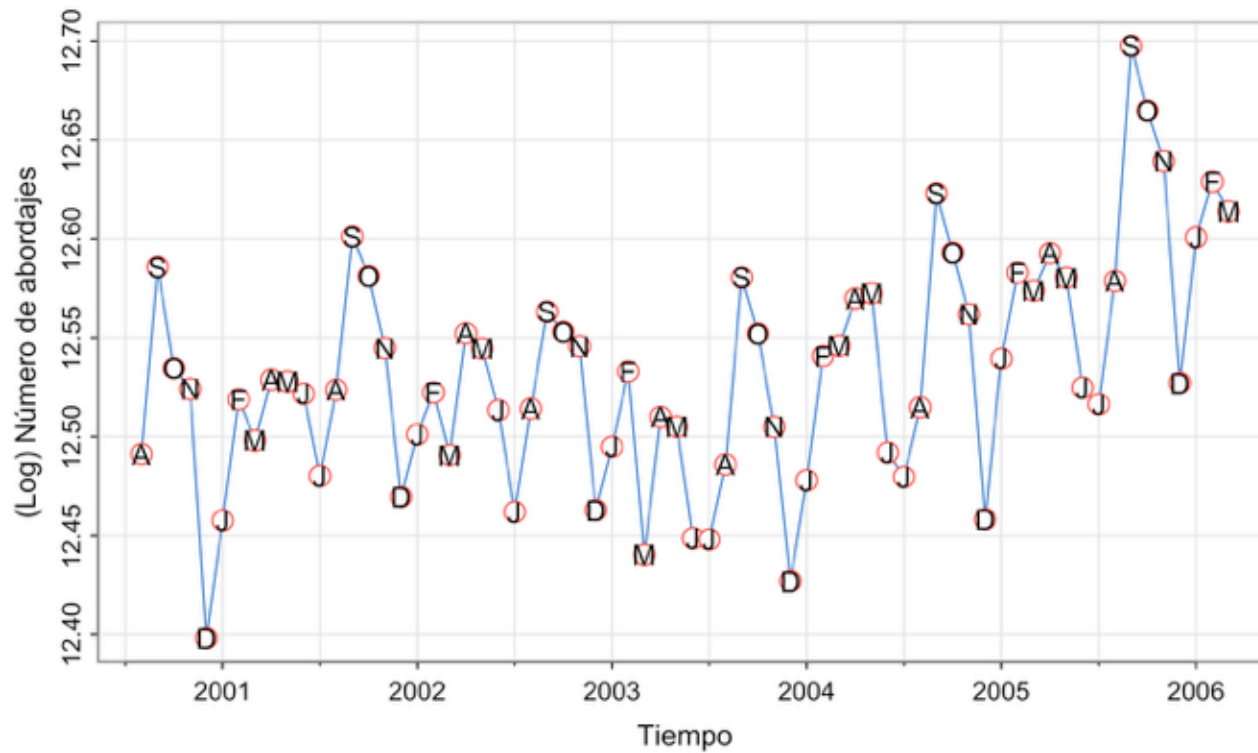
$ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$

El proceso $ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$ es el más general de los modelos multiplicativos. Se puede demostrar que:

- Es matemáticamente equivalente a un proceso ARMA con los coeficientes de su parte AR caracterizados por $\Phi^*(L) = \Phi(L)\Phi_P(L^s)$ y los coeficientes de su parte MA caracterizados por $\Theta^*(L) = \Theta(L)\Theta_Q(L^s)$.
- Debido a esta equivalencia, podemos utilizar los mismos métodos de especificación, ajuste, diagnósticos, etc., de un modelo ARMA.

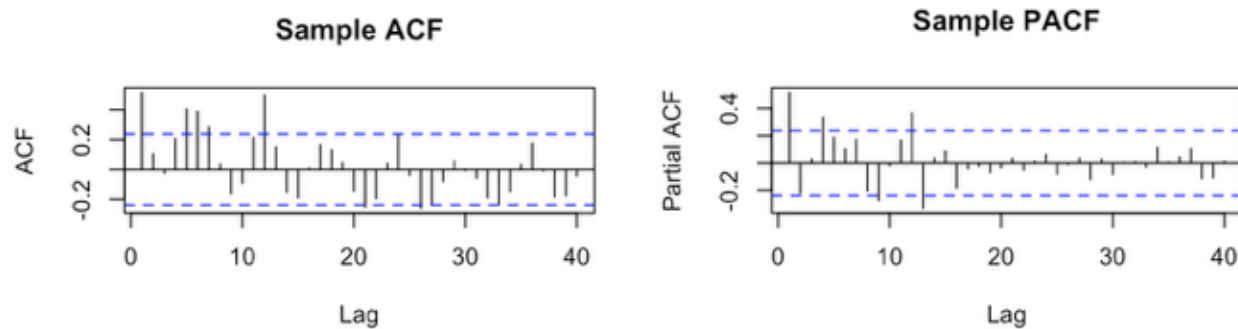
$ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$: Ejemplo (1/3)

Considera los siguientes datos sobre el uso de transporte (autobús y tren ligero) en Denver y Colorado. Los datos van desde agosto 2000 hasta marzo 2006. (Los datos se encuentran en escala logarítmica).



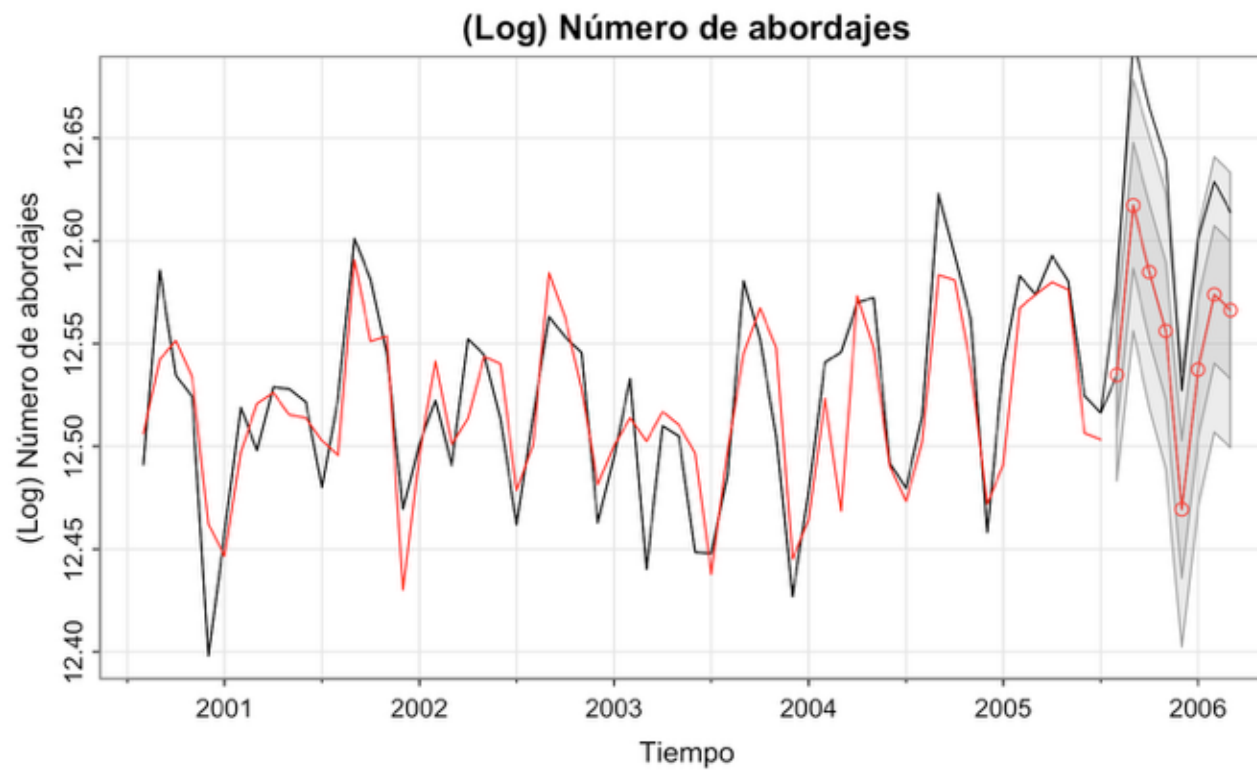
$ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$: Ejemplo (2/3)

La siguiente figura presenta la FAC y la FACP. Estos sugieren un modelo $ARMA(0, 3) \times ARMA(1, 0)_{12}$:



$ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$: Ejemplo (3/3)

Utilizamos el periodo agosto 2000 a julio 2005 para ajustar el modelo y utilizamos el resto de los datos para analizar qué tan bueno es el pronóstico:



Modelos SARIMA

Diferencias

Recordemos que las primeras diferencias de una serie de tiempo, y_t , se calculan como:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= y_t - y_{t-1} \\ &= (1 - L)y_t\end{aligned}$$

Podemos diferenciar la serie de tiempo d veces:

$$\Delta^d y_t = (1 - L^d)y_t$$

Diferencias: Ejemplo

Considera el proceso no estacionario:

$$\begin{aligned}y_t &= s_t + \varepsilon_t \\s_t &= s_{t-12} + u_t \\u_t &\sim iid(0, \sigma_u^2)\end{aligned}$$

Si tomamos primeras diferencias obtenemos:

$$\Delta y_t = (s_{t-12} - s_{t-13}) + (u_t - u_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

Sin embargo, este proceso sigue siendo *no estacionario*. ¿Por qué?

Diferencias estacionales

Definimos el operador de diferencias estacionales, Δ_s :

$$\Delta_s y_t = y_t - y_{t-s} = (1 - L^s)y_t$$

Recuerda: si tenemos datos mensuales, $s = 12$, si tenemos datos trimestrales, $s = 4$, etc.

Diferencias estacionales: Ejemplo (1/2)

Considera el proceso no estacionario:

$$\begin{aligned}y_t &= s_t + \varepsilon_t \\s_t &= s_{t-12} + u_t \\u_t &\sim iid(0, \sigma_u^2)\end{aligned}$$

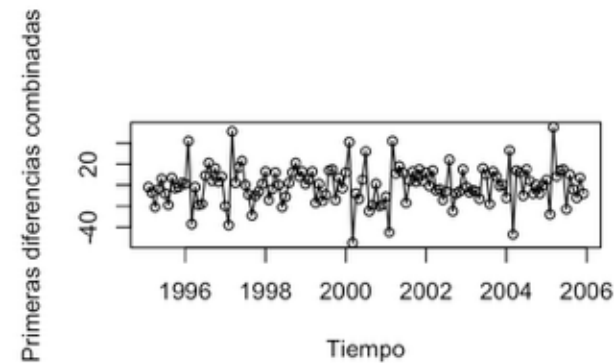
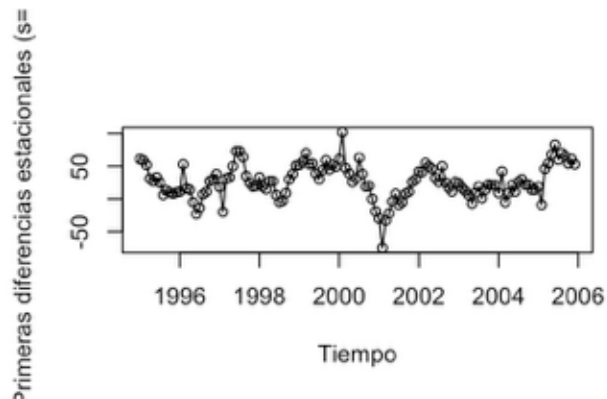
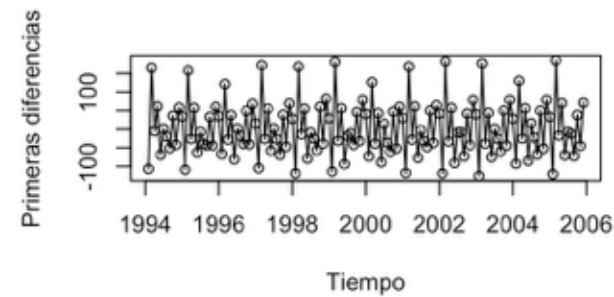
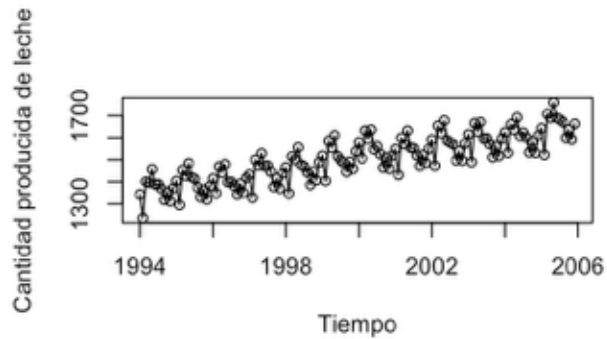
Si tomamos *primeras diferencias estacionales* obtenemos:

$$\Delta_{12} y_t = u_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-12}$$

Se puede mostrar que este proceso tiene la misma FAC que un $MA(1)_{12}$.

Diferencias estacionales: Ejemplo (2/2)

Datos sobre la producción de leche en Estados Unidos:



Modelos SARIMA (1/2)

Entonces, podemos extender los modelos SARMA para incorporar las dos fuentes de no estacionariedad.

Supongamos que $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$. Un modelo **ARIMA con componente estacional multiplicativo** (SARIMA), o $ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_s$:

$$\Phi(L)\Phi_P(L^s)\Delta^d\Delta_s^D y_t = \Theta(L)\Theta_Q(L^s)\varepsilon_t$$

Modelos SARIMA (2/2)

Se puede demostrar que:

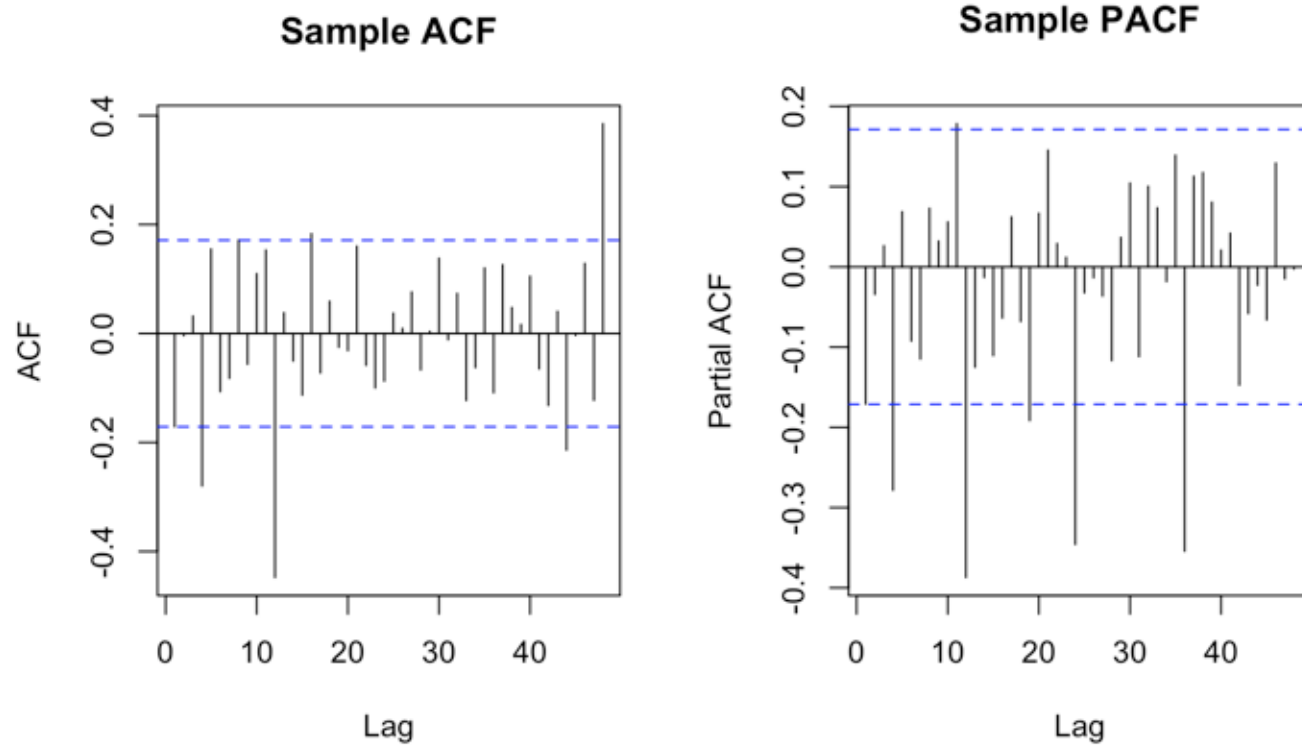
$$y_t \sim \text{ARIMA}(p, d, q) \times \text{ARIMA}(P, D, Q)_s$$

si y solo si:

$$\Delta^d \Delta_s^D y_t \sim \text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_s$$

Modelos SARIMA: Ejemplo (1/3)

Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para las primeras diferencias combinadas sobre la producción de leche en Estados Unidos:



Modelos SARIMA: Ejemplo (2/3)

De las FAC y FACP anteriores, los siguientes modelos podrían resultar adecuados:

- $ARIMA(0, 1, 0) \times ARIMA(0, 1, 1)_{12}$
- $ARIMA(0, 1, 0) \times ARIMA(3, 1, 0)_{12}$

¿Por qué?

Modelos SARIMA: Ejemplo (3/3)

Utilizamos el periodo enero 1994 a diciembre 2004 para ajustar el modelo y utilizamos el resto para analizar qué tan bueno es el pronóstico:

