

Métodos Cuantitativos

II

Modelos no estacionarios I: tendencia

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.03.24

Introducción

Estacionariedad (1/4)

Recordemos que para que una serie de tiempo, y_t , sea estacionaria (en covarianza), es necesario que:

- Su media y varianza sean constantes. Esto es, para todo $t \in \mathbb{Z}$:

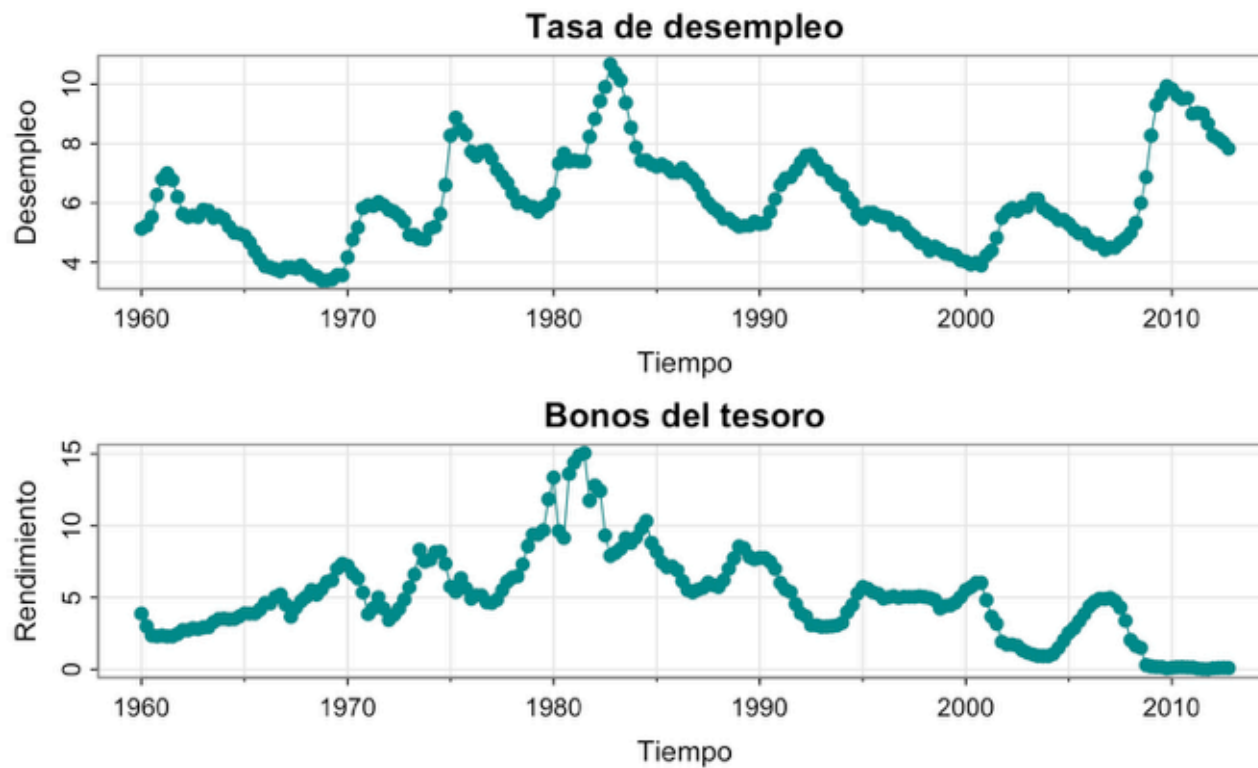
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y_t) &= \mu; \\ \mathbb{V}ar(y_t) &= \gamma_0 < \infty\end{aligned}$$

- Su función de autocovarianza dependa solo del desfase h y no del tiempo t :

$$\gamma(t, \tau) = \gamma(h); \quad h = |t - \tau| \in \mathbb{Z}$$

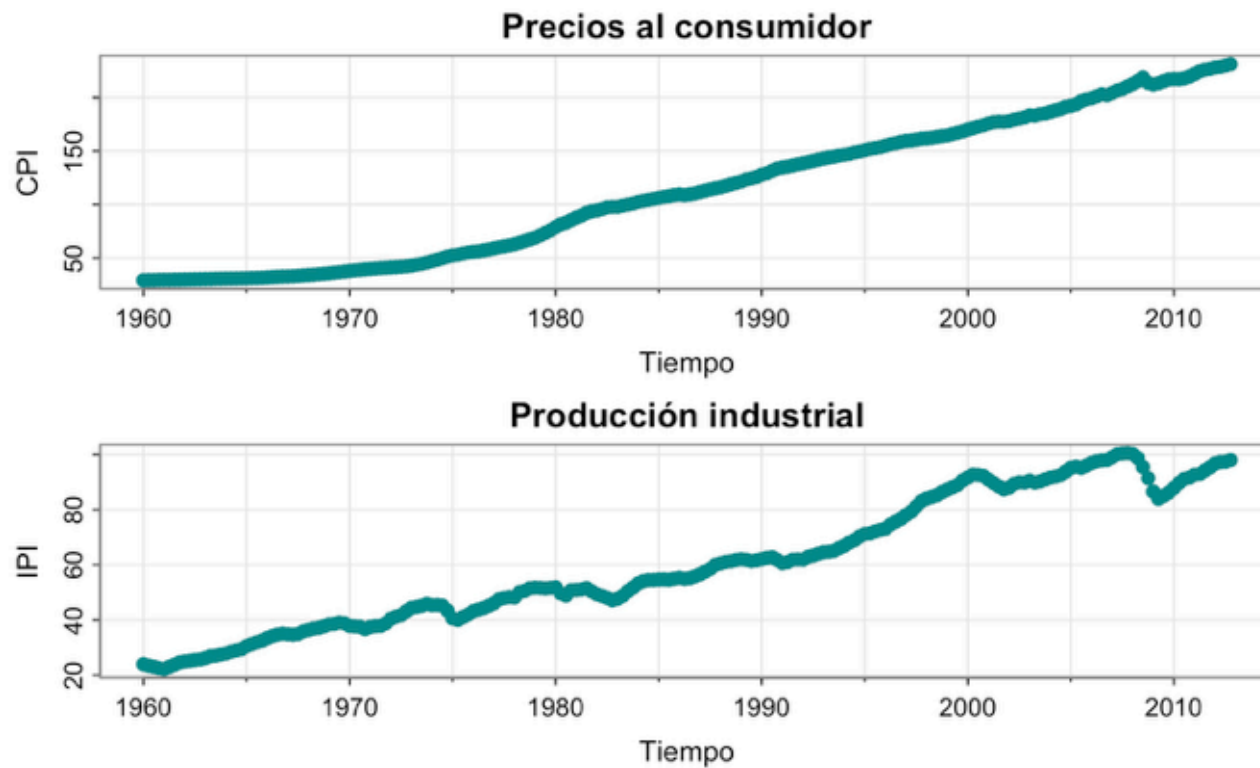
Estacionariedad (2/4)

Las siguientes series de tiempo podrían ser estacionarias:



Estacionariedad (3/4)

¿Qué pasa si las series de tiempo presentan una tendencia? Por ejemplo:



Estacionariedad (4/4)

Los modelos con tendencia violan directamente la condición de estacionariedad, esto es debido a que:

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu_t.$$

Esto es, la media es una función del tiempo.

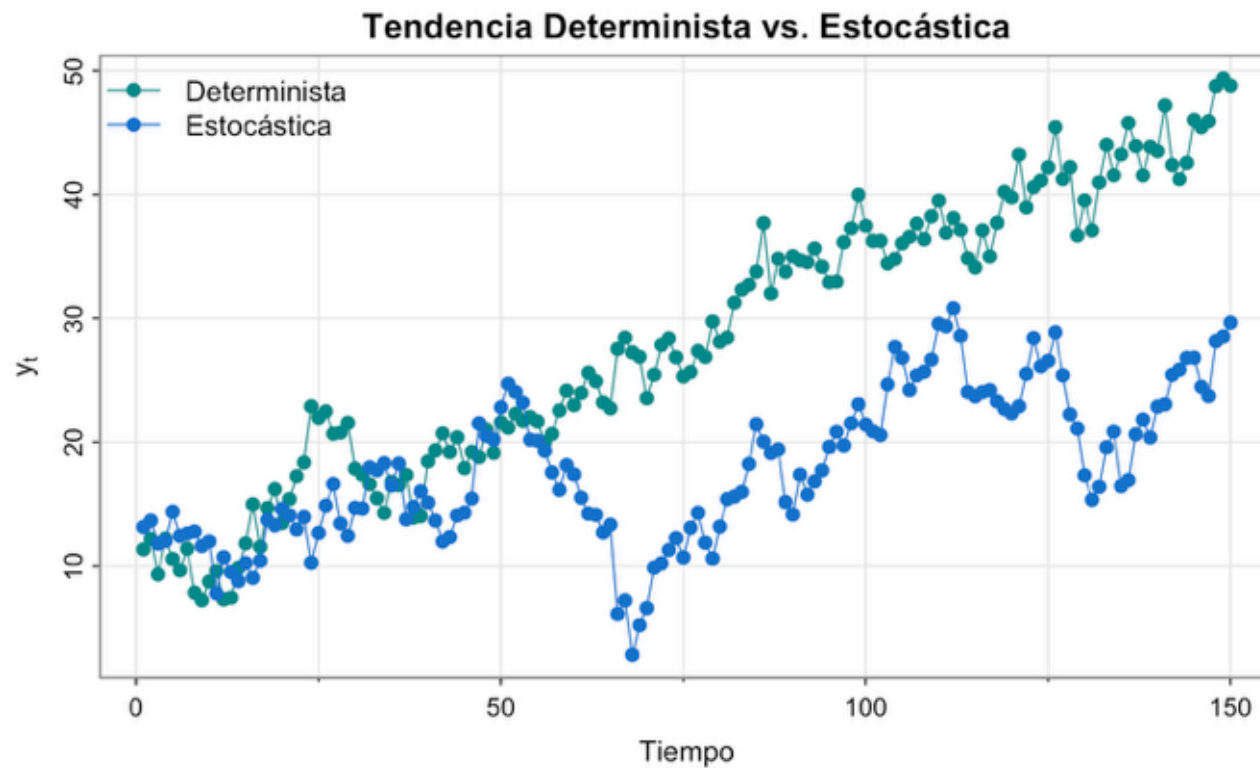
Incorporación de la tendencia en el modelo (1/3)

Existen dos formas diferentes para incorporar la tendencia en el modelo:

- **Tendencia determinista.** Incorporamos *explícitamente* en el modelo una tendencia determinada por una función del tiempo.
- **Tendencia estocástica.** La tendencia proviene de una *raíz unitaria*.

Incorporación de la tendencia en el modelo (2/3)

Tendencia determinista vs. Tendencia estocástica



Incorporación de la tendencia en el modelo (3/3)

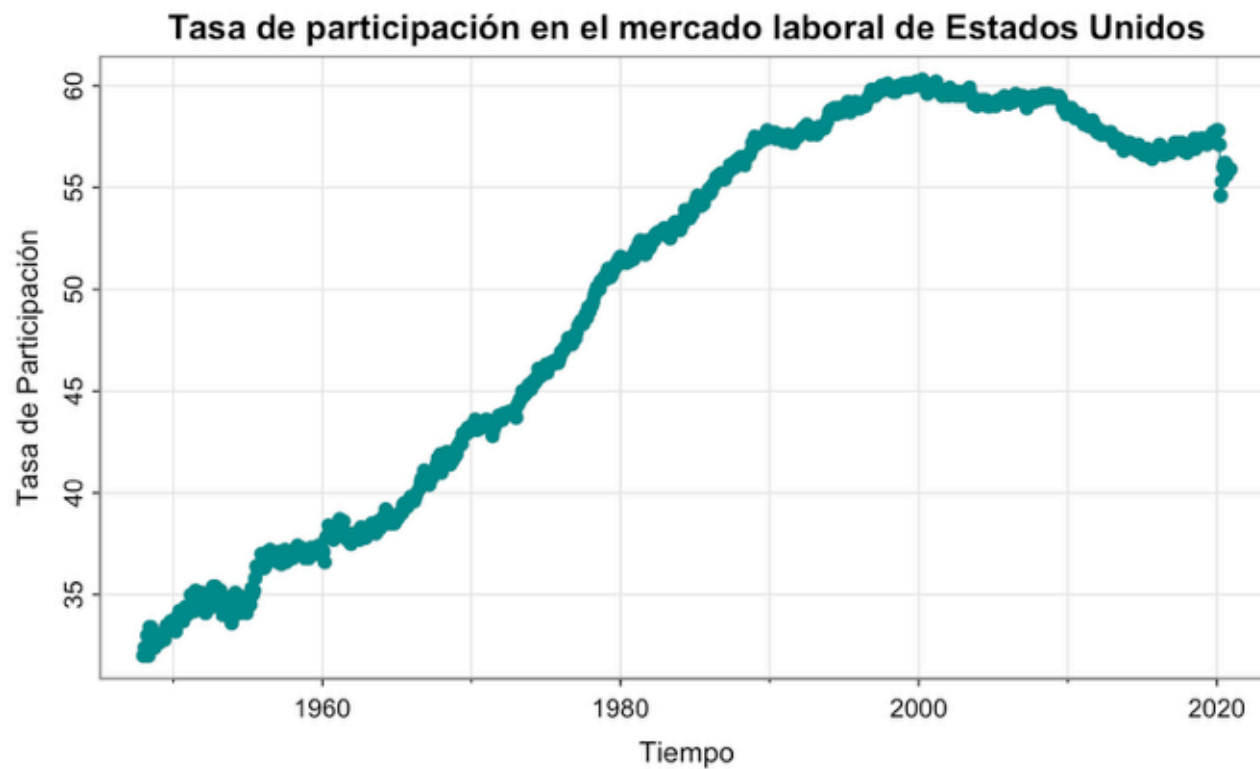
Aunque los dos tipos de tendencia son visualmente parecidos, las implicaciones teóricas y prácticas son diferentes:

- En un modelo con tendencia determinista, los shocks tienen *efectos transitorios*. En un modelo con tendencia estocástica, los shocks tienen *efectos permanentes*.
- El procedimiento para *remover* la tendencia y hacer la serie estacionaria es distinto para cada caso.

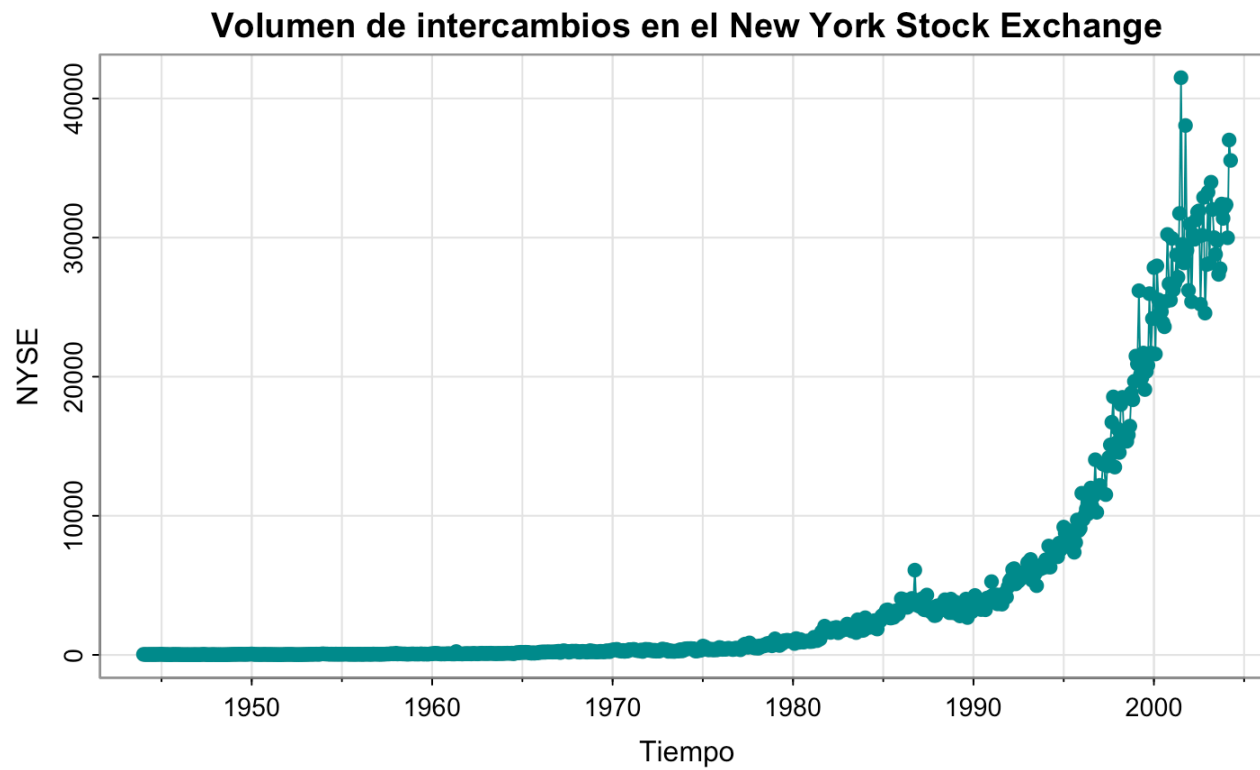
Tendencia determinista

Tendencia determinista (1/2)

La **tendencia determinista** caracteriza el patrón gradual y de largo plazo de las variaciones de una serie de tiempo. Esta tendencia puede ser lineal o no lineal.



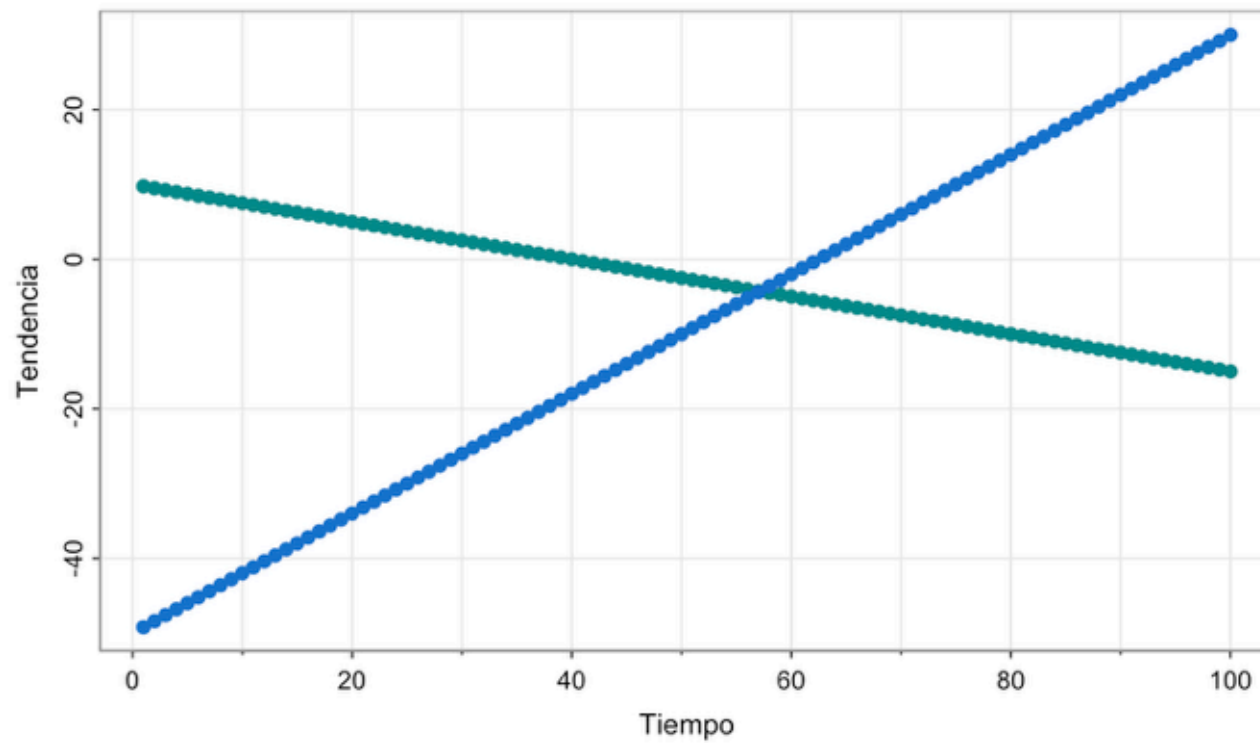
Tendencia determinista (2/2)



Tendencia lineal (1/2)

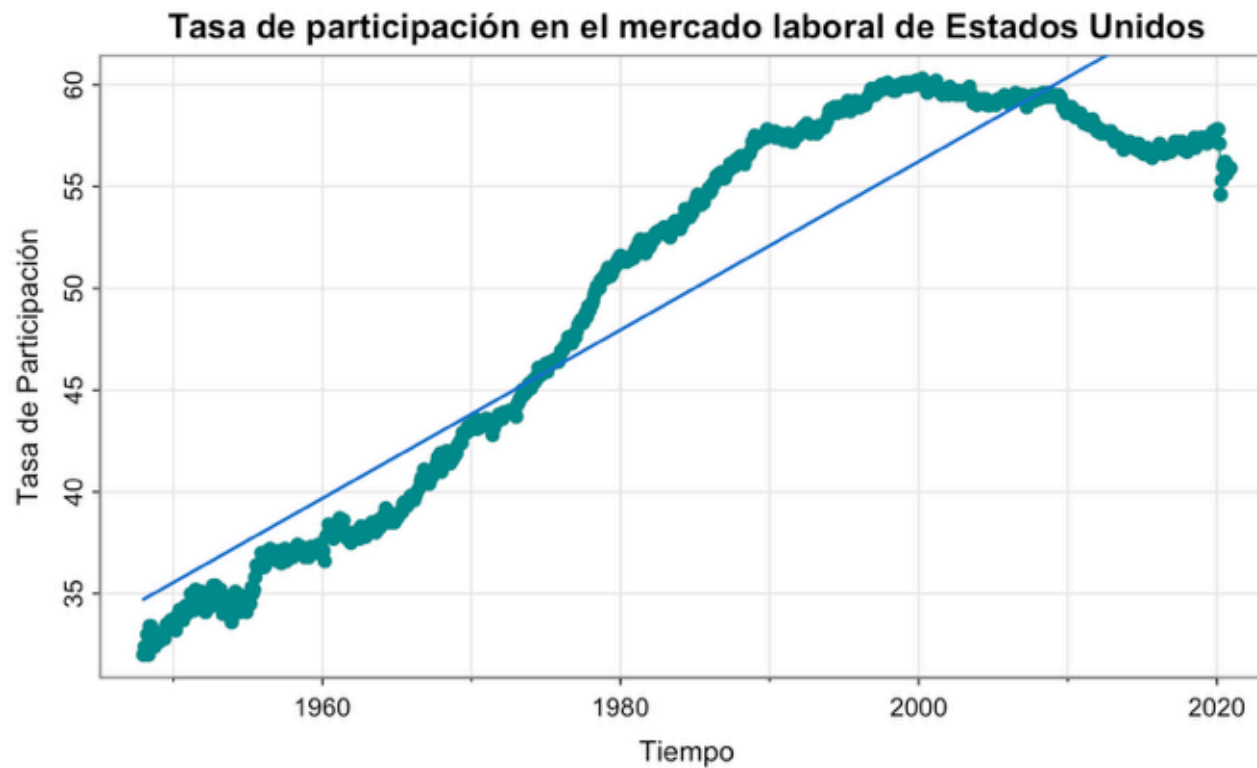
Si la tendencia es lineal, podemos modelarla como:

$$Trend_t = \beta_1 + \beta_2 t$$



Tendencia lineal (2/2)

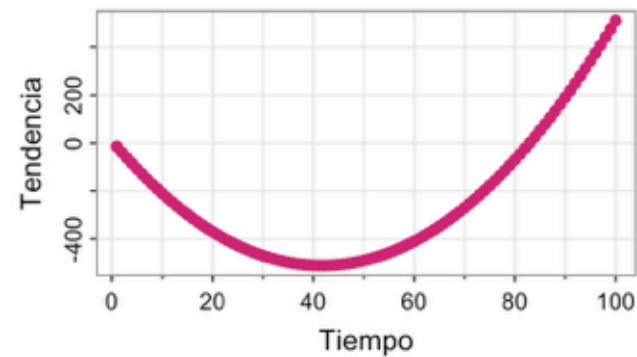
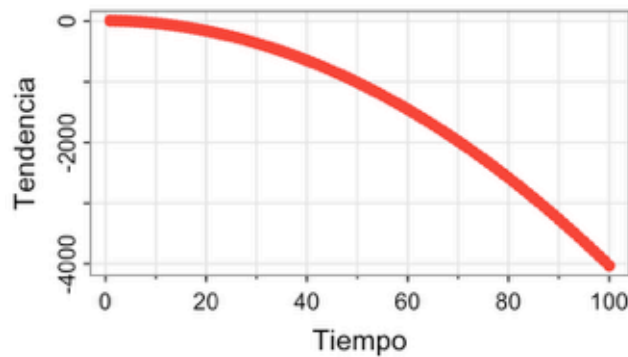
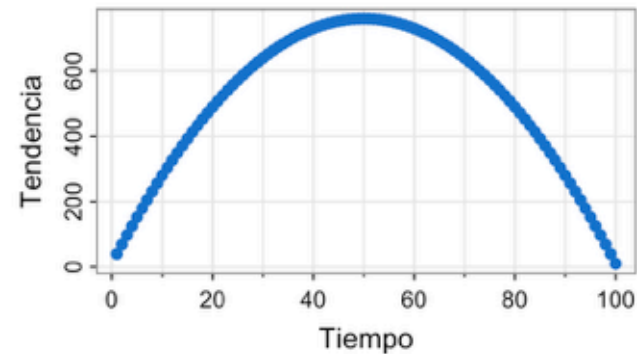
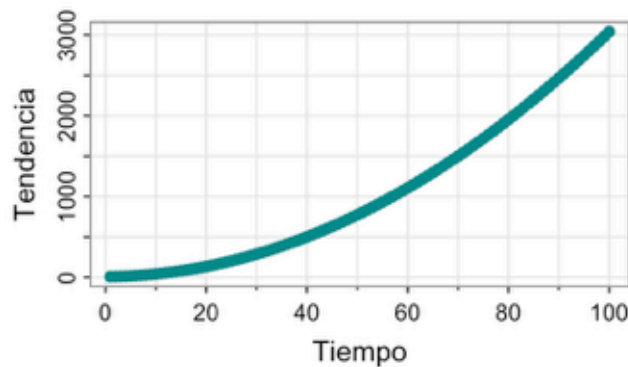
Por ejemplo:



Tendencia no lineal (1/5)

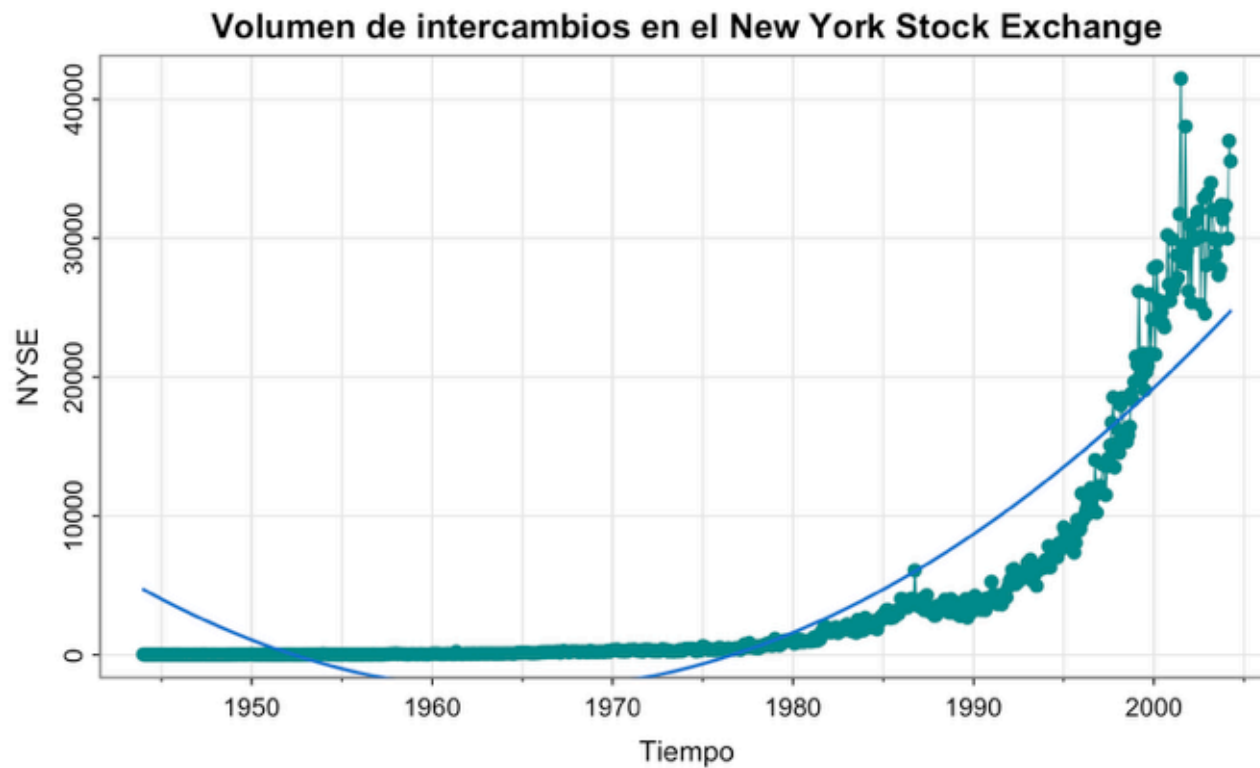
Si la tendencia es no lineal, podemos intentar modelarla como una función cuadrática:

$$Trend_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2$$



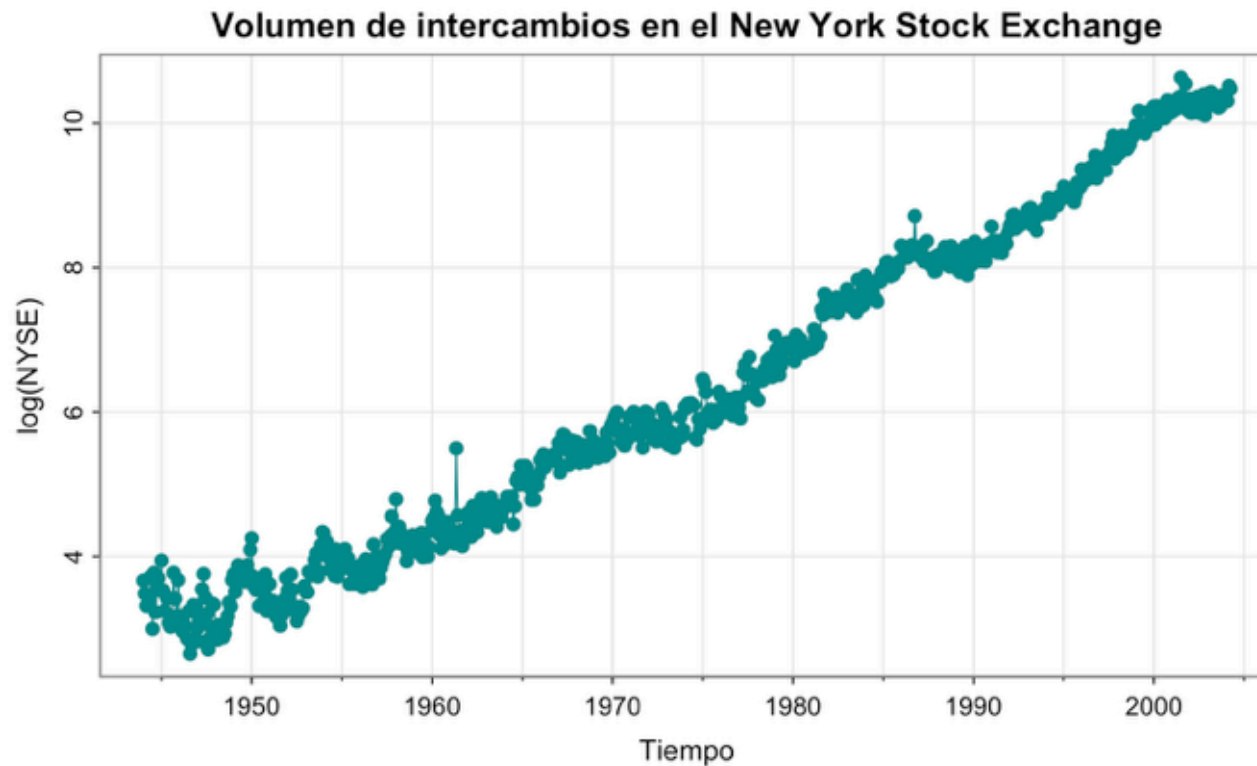
Tendencia no lineal (2/5)

Por ejemplo, para el volumen de transacciones en la bolsa de Nueva York:



Tendencia no lineal (3/5)

También podemos modelar la tendencia de una serie de tiempo suponiendo que esta sigue un comportamiento exponencial o logarítmico. Por ejemplo, la siguiente figura muestra el volumen de transacciones en la bolsa de Nueva York en logaritmos:



Tendencia no lineal (4/5)

Nota que el logaritmo del volumen de transacciones de la bolsa de Nueva York parece exhibir un comportamiento lineal. Esto es común para muchas series económicas. Si tenemos un **comportamiento exponencial**, entonces:

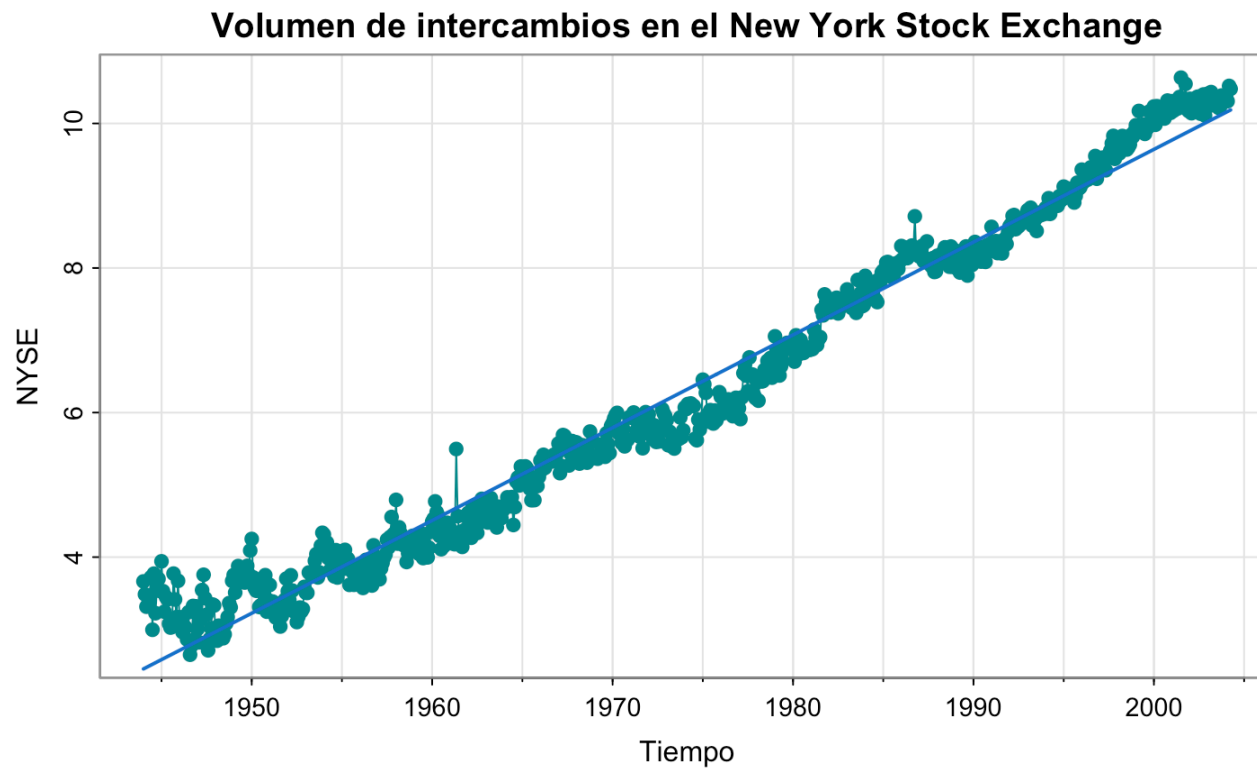
$$Trend_t = \beta_1 \exp^{\beta_2 t}$$

Pero si aplicamos logaritmos:

$$\ln Trend_t = \ln \beta_1 + \beta_2 t$$

Naturalmente el logaritmo de $Trend_t$ es una función lineal del tiempo.

Tendencia no lineal (5/5)



Estimación de la tendencia

En ausencia de un componente cíclico, los coeficientes de los modelos de tendencia lineal y cuadrática (o de polinomios de mayor orden) *pueden estimarse por MCO*. Los otros tipos de ecuaciones no lineales también pueden estimarse por MCO siempre y cuando estos admitan una transformación que nos resulte en una ecuación lineal.

Nota

Para tendencias no lineales, también podemos estimar los coeficientes mediante el método de los Mínimos Cuadrados No Lineales (MCNL).

Selección del modelo

Obviamente, podríamos ajustar más de un tipo de tendencia a una serie de datos. Para elegir cuál modelo es el más adecuado, podemos utilizar los *critérios de información Akaike (AIC) y Schwartz (BIC o SIC)*.

Como sabemos, tenemos que elegir el modelo con el AIC y el BIC más bajos posibles.

Removiendo la tendencia determinista (1/3)

Ejercicio

Considera el modelo:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$$

Muestra que y_t no es estacionario.

Removiendo la tendencia determinista (2/3)

Ejercicio: “detrending”

Considera el modelo:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$$

Claramente, la transformación:

$$\begin{aligned} y_t^* &= y_t - \beta_1 - \beta_2 t \\ &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

es estacionaria. Esta transformación puede hacerse operacional reemplazando β_1 y β_2 por sus estimadores de MCO.

Removiendo la tendencia determinista (3/3)

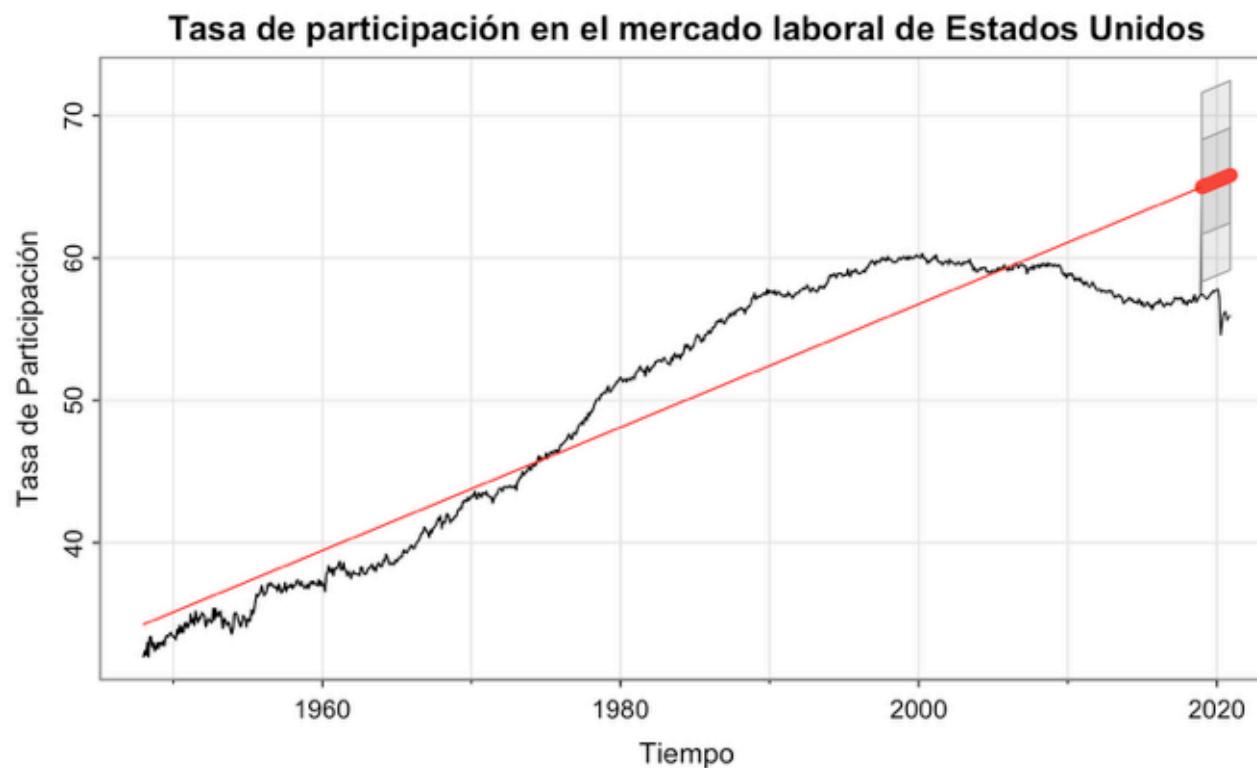
Nota

Una serie con **tendencia estacionaria** es aquella que se vuelve estacionaria una vez eliminada su **tendencia determinista**. En otras palabras, el componente estocástico de la serie es estacionario, y la no estacionariedad proviene únicamente de una tendencia predecible.

Ejemplo

Ejemplo

Las técnicas habituales para analizar y pronosticar series de tiempo, aplican también para los modelos de tendencia (ver modelos ARMA). Por ejemplo, para la tasa de participación en el mercado laboral de Estados Unidos tenemos:



Tendencia estocástica: Raíz unitaria

Raíz unitaria (1/5)

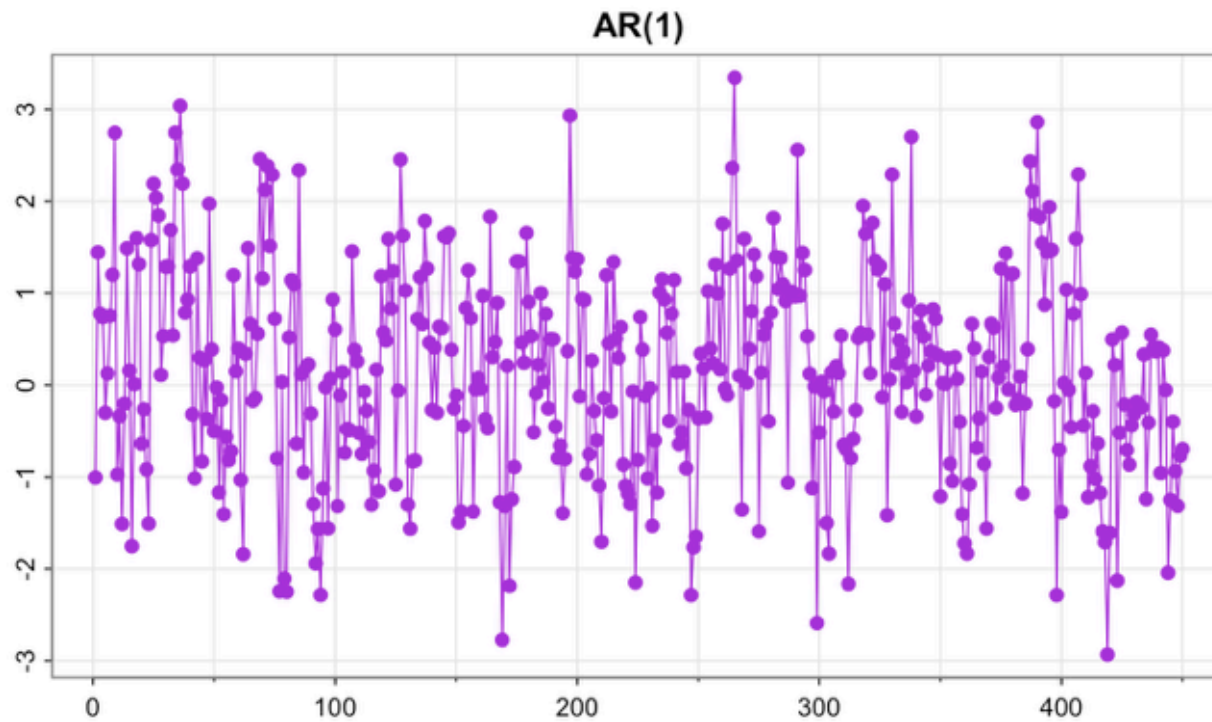
Como hemos visto, un proceso $AR(p)$:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

es estacionario si las raíces del polinomio $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$ se encuentran *fuera del círculo unitario*.

Raíz unitaria (2/5)

Una *realización* de un AR(1) estacionario con $\phi_1 = 0.5$ es:



Raíz unitaria (3/5)

Si *al menos* una de las raíces del polinomio $\Phi(L) = 0$ es **unitaria** (es decir, igual a **1**), tendremos que la serie de tiempo es **no estacionaria**.

Cuando esto ocurre tenemos que:

$$\sum_{i=1}^p \phi_i = 1$$

Raíz unitaria (4/5)

Ejercicio

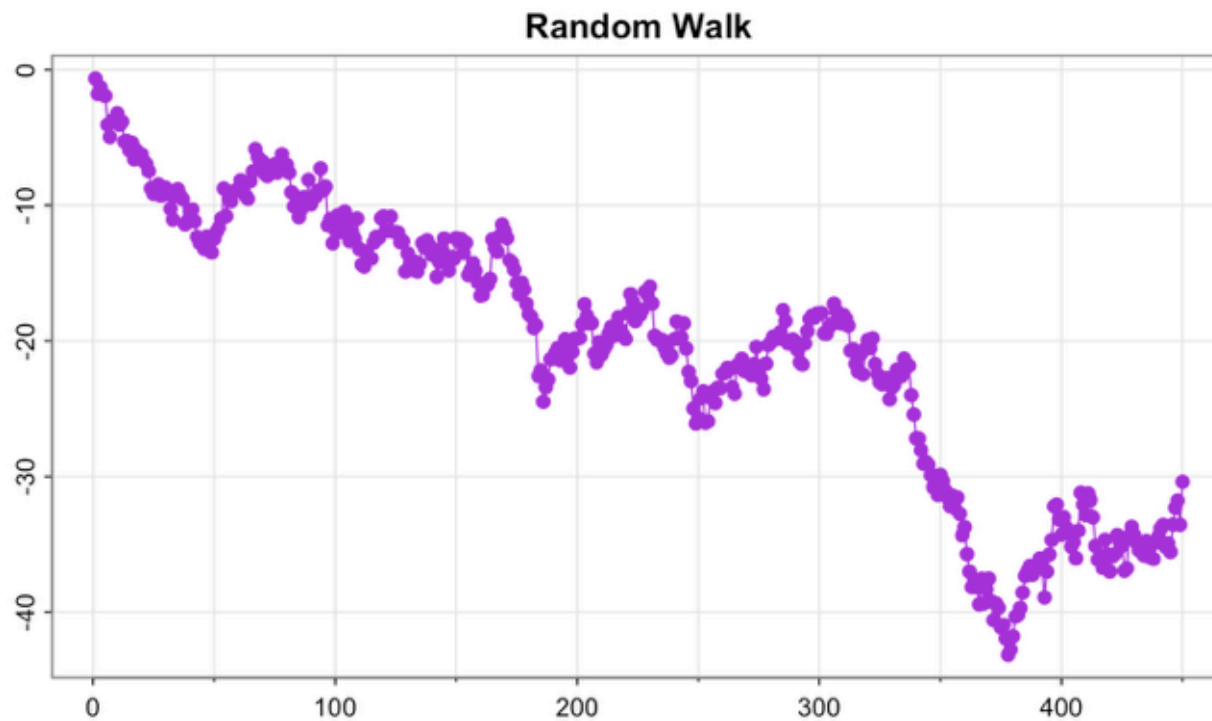
Calcula la función de autocovarianzas para mostrar que un proceso AR(1):

$$\begin{aligned}y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t; \\ \varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma^2)\end{aligned}$$

no es estacionario cuando $\phi_1 = 1$. Este proceso se conoce como **caminata aleatoria**.

Raíz unitaria (5/5)

La siguiente es una gráfica de *una realización* de una caminata aleatoria:



Observa que, a diferencia de un proceso autorregresivo, una caminata aleatoria no presenta *reversión a la media*.

Función de impulso respuesta

Ejercicio

Considera un proceso AR(1):

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon$$

1. Muestra que, cuando $|\phi| < 1$ su función de impulso-respuesta (IRF) es $\psi_h = \phi^h$.
2. Analiza qué ocurre con la IRF cuando $\phi = 1$. En particular: *¿en cuál caso el efecto de un shock es transitorio? ¿En cuál caso es permanente?*

El operador de diferencias y modelos ARIMA

Operador de diferencias (1/3)

Sea y_t una serie de tiempo. El operador de diferencias Δ se define como:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= y_t - y_{t-1} \\ &= y_t - L y_t \\ &= (1 - L)y_t\end{aligned}$$

Este operador se puede aplicar varias veces. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta y_t) &= \Delta^2 y_t \\ &= (1 - L)^2 y_t \\ &= (1 - 2L + L^2)y_t \\ &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}\end{aligned}$$

Operador de diferencias (2/3)

Nota que:

$$\Delta(y_t - \mu) = \Delta y_t$$

Y que:

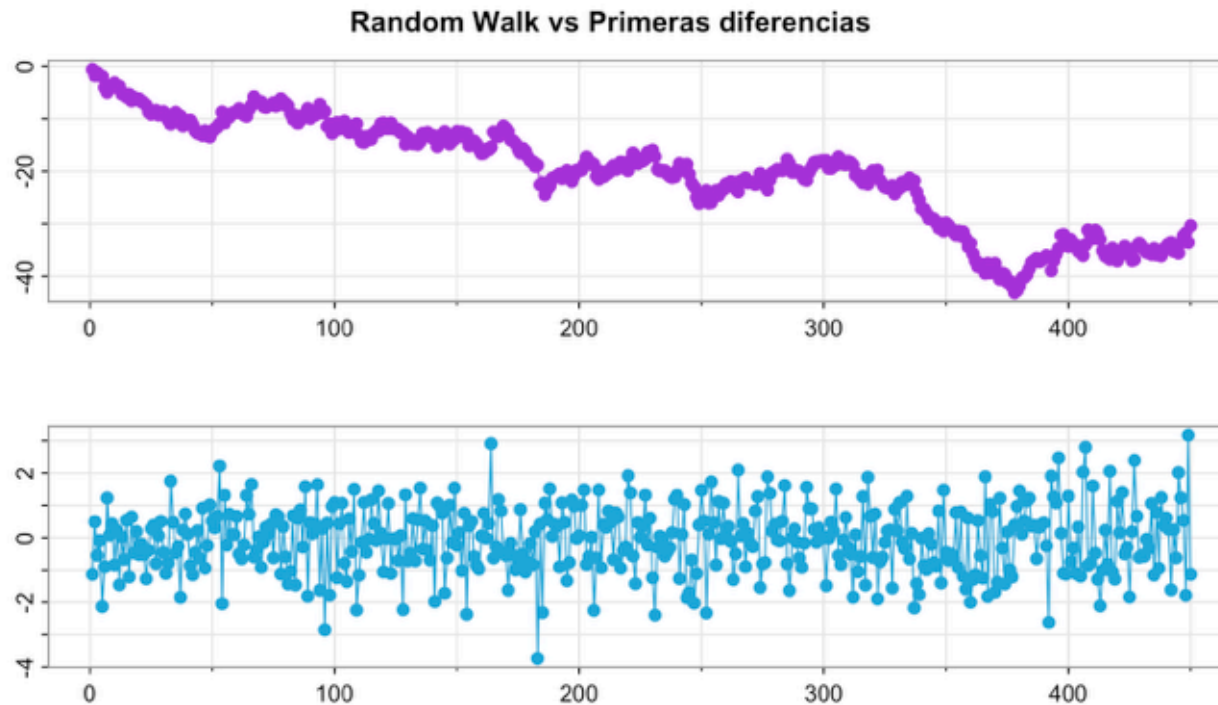
$$\Delta^2(y_t - \mu - \beta t) = \Delta^2 y_t$$

En general, si aplicamos el operador de diferencias d veces, eliminamos toda la información sobre *cualquier tendencia temporal de orden menor a d* .

Operador de diferencias (3/3)

Ejemplo

Si aplicamos primeras diferencias a una caminata aleatoria, obtenemos una **serie estacionaria**:



Modelos ARIMA (1/3)

Lo anterior nos permite definir un **proceso integrado**. Se dice que una serie y_t es integrada de orden d , $y_t \sim I(d)$, si necesita ser diferenciada d veces para convertirse en un proceso estacionario.

Y entonces:

Una serie de tiempo no estacionaria $y_t \sim I(d)$ sigue un **proceso ARIMA**(p, d, q) si:

$$\Delta^d y_t \sim \text{ARMA}(p, q)$$

Modelos ARIMA (2/3)

Ejercicio

Considera un proceso AR(1) con $\phi_1 = 1$ (una caminata aleatoria):

$$\begin{aligned}y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t; \\ \varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma^2)\end{aligned}$$

Muestra que $y_t \sim \text{ARIMA}(0, 1, 0)$.

Modelos ARIMA (3/3)

Ejercicio

Considera una *caminata aleatoria con deriva* μ :

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t;$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Muestra que $y_t \sim \text{ARIMA}(0, 1, 0)$.

La prueba de Dickey-Fuller

Prueba de Dickey-Fuller (1/3)

Para diferenciar entre los modelos con tendencia determinista y tendencia estocástica podemos aplicar la **prueba de Dickey-Fuller**. En su versión más simple, la prueba considera el siguiente proceso AR(1):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t;$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Si hacemos una regresión de y_t sobre y_{t-1} , podemos aplicar una prueba de significancia para el coeficiente ϕ_1 :

$$H_0 : \phi_1 = 1$$
$$H_1 : \phi_1 \neq 1$$

El estadístico de la prueba es:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\text{s.e.}(\hat{\phi}_1)}$$

Prueba de Dickey-Fuller (2/3)

Alternativamente:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= (\phi_1 - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t\end{aligned}$$

Si hacemos una regresión de Δy_t sobre y_{t-1} , podemos aplicar una prueba de significancia para el coeficiente γ :

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma \neq 0$$

El estadístico de la prueba es:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\gamma}}{\text{s.e.}(\hat{\gamma})}$$

Prueba de Dickey-Fuller (3/3)

Un problema encontrado por Dickey y Fuller es que el estadístico de la prueba (conocido como **estadístico de Dickey-Fuller**) no sigue una distribución t , sino una distribución especial conocida en la literatura como **distribución de Dickey-Fuller**.

Los valores críticos de la prueba pueden consultarse en varios libros de texto, así como en varios paquetes de computadora.

Dickey-Fuller con constante y con tendencia determinista

El caso que hemos explicado es uno de tres posibles que pueden ser considerados por la prueba. Cada caso depende de la hipótesis alternativa:

- **Caso 1:** y_t sigue un proceso estacionario con media cero.
- **Caso 2:** y_t sigue un proceso estacionario con media diferente de cero. Esto es, un *proceso estacionario con deriva*:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- **Caso 3:** y_t sigue un proceso con tendencia estacionaria. Esto es, un *proceso estacionario con tendencia determinista*.

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Prueba Aumentada de Dickey Fuller, ADF (1/3)

La prueba de Dickey-Fuller no es válida si los errores no se comportan como un ruido blanco. La **Prueba Aumentada de Dickey-Fuller** (ADF) resuelve este problema considerando un proceso AR(p):

$$y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

O, en primeras diferencias:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

Si tenemos una raíz unitaria, entonces $\gamma = 0$ y y_t sigue un proceso AR($p - 1$) en primeras diferencias. El estadístico de la prueba Dickey-Fuller sigue la misma distribución asintótica que antes.

Prueba Aumentada de Dickey Fuller, ADF (2/3)

Igual que antes, podemos generalizar para incluir una media diferente que cero y una tendencia determinista. Entonces, la hipótesis alternativa considera:

- **Caso 1**, *proceso estacionario con media cero*.
- **Caso 2**, *proceso estacionario con deriva*:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

- **Caso 3**, *proceso estacionario con tendencia determinista*:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

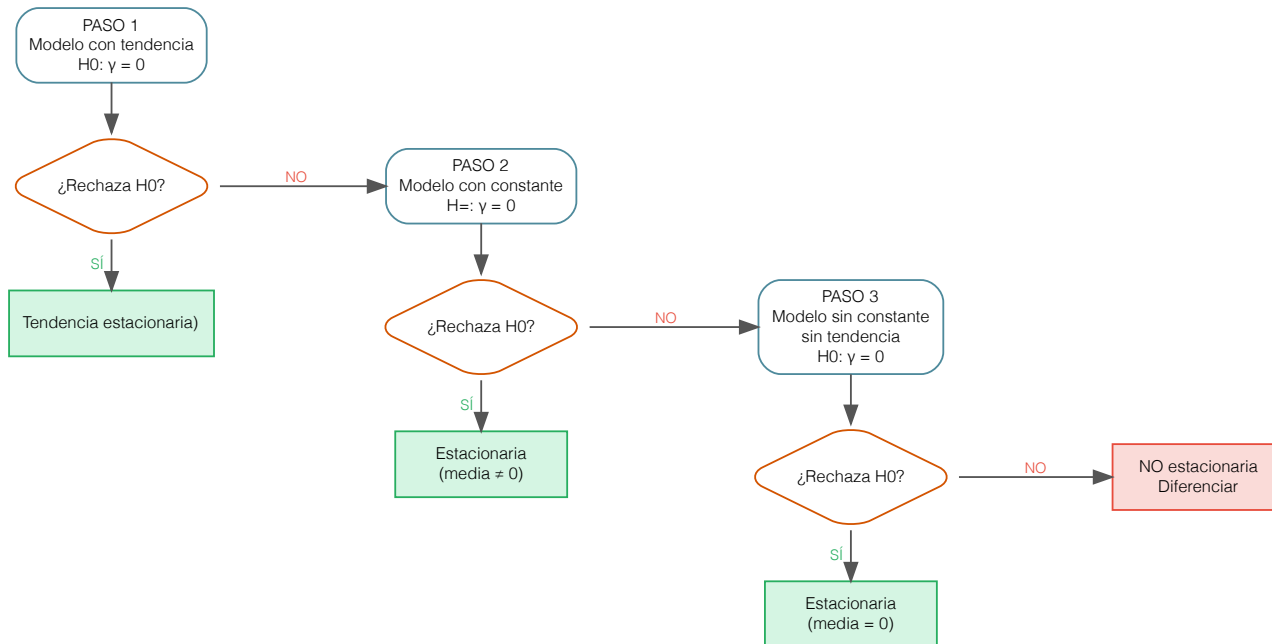
Prueba Aumentada de Dickey Fuller, ADF (3/3)

Nota

Podemos probar de manera conjunta la *ausencia de deriva, tendencia temporal y raíz unitaria* de forma conjunta utilizando un estadístico tipo F, conocido como la **F de Dickey-Fuller**.

Aplicación de la prueba ADF

En la práctica no es tan claro qué caso de la prueba ADF considerar. Una opción es seguir el siguiente procedimiento.



Tendencia determinista vs. tendencia aleatoria (1/2)

La principal diferencia entre las tendencias determinista y aleatoria es:

- Si la tendencia es determinista, *los shocks externos solo afectan al componente estacionario, no a la tendencia*. Entonces, en presencia de shocks externos, y_t se desvía temporalmente de su trayectoria, pero su naturaleza lo obliga a regresar a su trayectoria original. El efecto de los shocks es transitorio.
- Si la tendencia es estocástica, *los shocks se incorporan permanentemente al nivel de la serie* (a y_t). Entonces, la trayectoria futura de la serie se construye a partir de este nuevo nivel. El efecto de los shocks es permanente.

Tendencia determinista vs. tendencia aleatoria (2/2)

Aplicar la transformación incorrecta para hacer el modelo estacionario tiene consecuencias graves.

- *Si una serie es estacionaria en tendencia y aplicamos diferencias*, obtenemos:

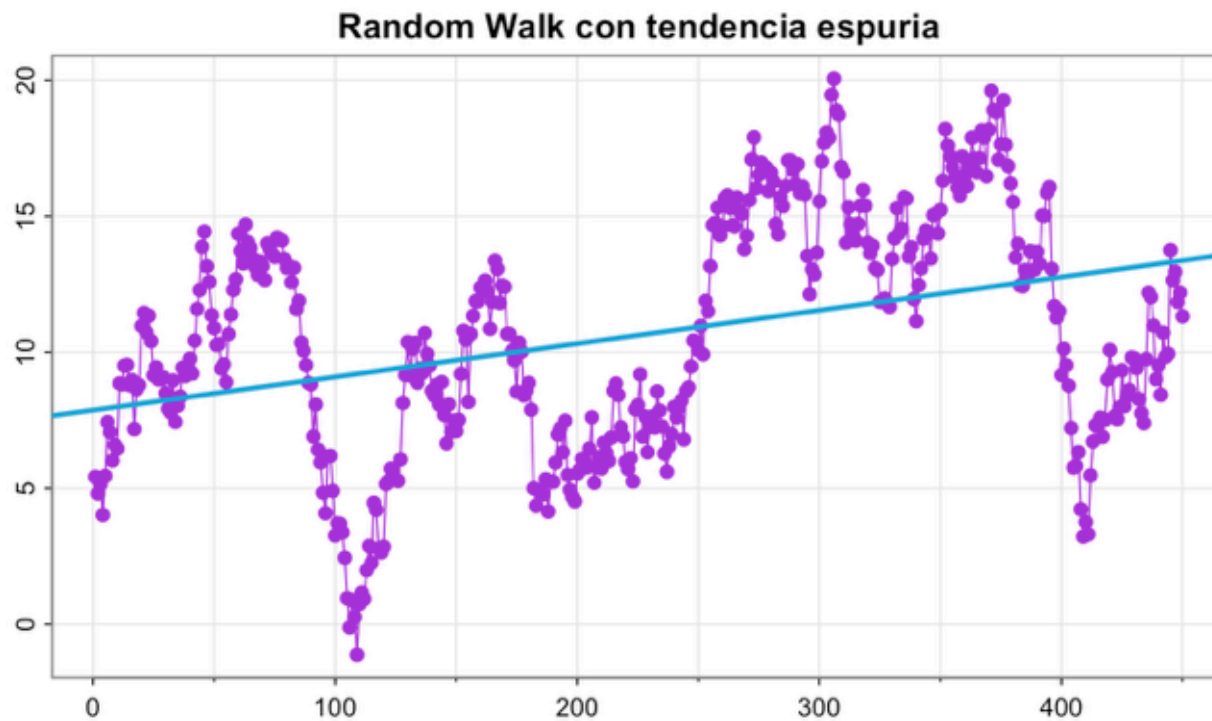
$$\Delta y_t = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

Hemos introducido artificialmente una estructura de media móvil en los errores que no es invertible. Esto se conoce como **sobrediferenciación**, lo cual complica la estimación y el pronóstico.

- *Si una serie es una caminata aleatoria y le removemos una tendencia lineal*, los residuos de esa regresión seguirán conteniendo la raíz unitaria. No hemos solucionado el problema de no estacionariedad, simplemente hemos ajustado una **tendencia espuria**.

Tendencia espuria (1/2)

Consideremos el caso de una caminata aleatoria:



Tendencia espuria (2/2)

Si hacemos una regresión de y_t contra el tiempo, encontramos un coeficiente de tendencia *altamente significativo*. Naturalmente, este es resultado completamente falso. Este es el fenómeno de la tendencia espuria.

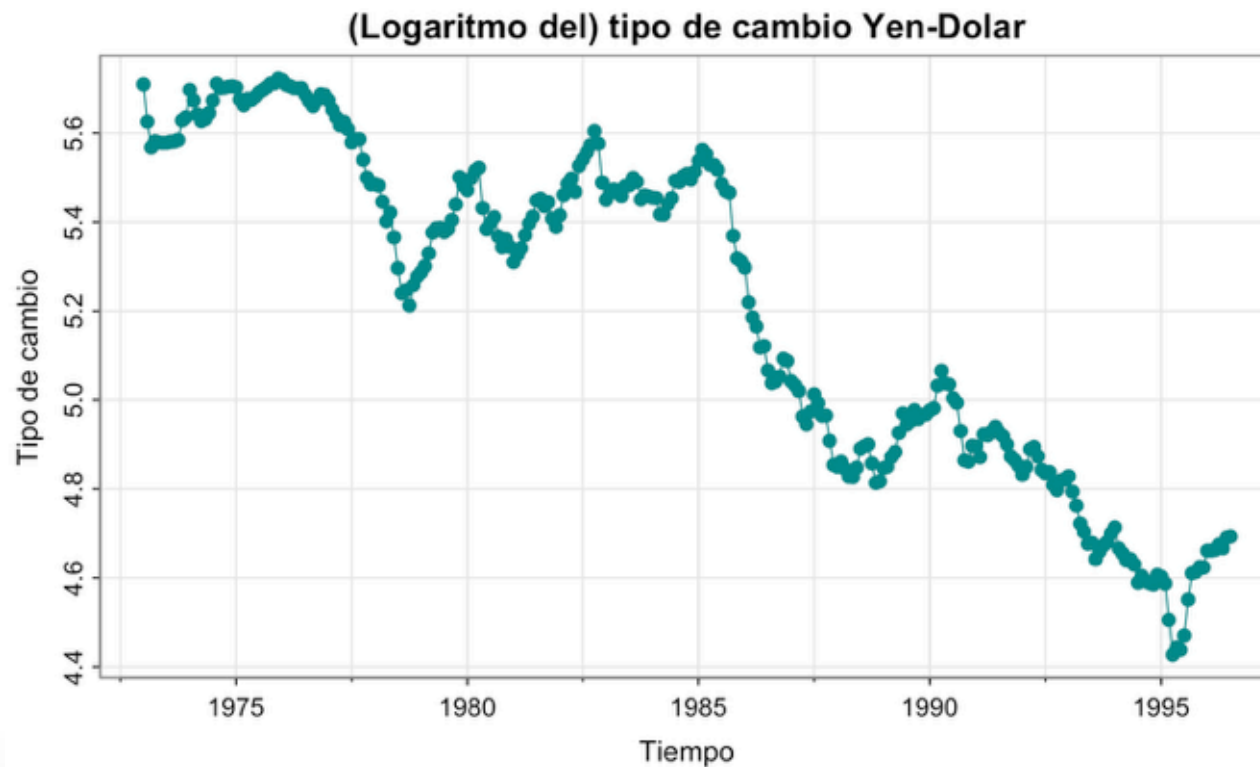
Regresión de una Caminata Aleatoria contra una Tendencia (Espuria)

Término	Coeficiente	Desv. Estándar	Estadístico t	Valor p
Constante	7.8744	0.3741	21.048	<0.001
Tendencia (t)	0.0122	0.0014	8.507	<0.001

Ejemplo (1/4)

Ejemplo

Naturalmente, una vez que la serie de tiempo es estacionaria, todo el análisis (ajuste, pronósticos, etc.) es idéntico al análisis de los modelos ARMA(p, q). Por ejemplo, considera la tasa de cambio Yen-Dólar (en logaritmos) para el periodo enero 1973 a julio de 1996:



Ejemplo (2/4)

Ejemplo

Utilizamos una prueba de Dickey-Fuller aumentada para incluir seis retardos, constante y tendencia lineal. Esta prueba muestra que la serie de tiempo no es estacionaria:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -2.5779 2.9597 3.3887
```

Ejemplo (3/4)

Ejemplo

En cambio, las primeras diferencias de la serie de tiempo son estacionarias:

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration Test #
## #####
##
## The value of the test statistic is: -5.9335 17.6073
```

Ejemplo (4/4)

Ejemplo

Un modelo ARIMA(0,1,1) resulta en:

