Métodos Cuantitativos II

Medidas de dependencia central y estacionariedad

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.01.15

Dependencia serial

Introducción

Antes de modelar una serie de tiempo, es necesario describir su comportamiento. Para esto calculamos:

1. La función promedio.
2. La función de autocovarianza.
3. La función de autocorrelación.

Veremos en qué consisten estas funciones y algunos ejemplos.

Función promedio

La **función promedio** se define como:

$$\mu_{y_t} = \mathbb{E}(y_t)$$

donde y_t es una serie de tiempo en el momento $t, t = 1, \ldots, T$.

Función promedio: Ejemplos (1/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

En este caso:

$$
\begin{aligned}
\mu_{y_t} &= \mathbb{E}(y_t) \\
&= \frac{1}{3}\left[\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1})\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Función promedio: Ejemplos (2/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t;\; y_0 = 0 \\
&= \delta t + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

En este caso:

$$\mu_{y_t} = \delta t$$

Función de autocovarianza

La **función de autocovarianza** se define como:

$$\gamma_y(t, \tau) = E[(y_t - \mu_t)(y_\tau - \mu_\tau)]$$

donde y_t es alguna serie de tiempo en el momento t. Nota que si $\tau = t$:

$$\begin{aligned} \gamma(t, t) &= \mathbb{E}[(y_t - \mu_t)^2] \\ &= \mathbb{V}ar(y_t) \end{aligned}$$

Función de autocovarianza: Ejemplos (1/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

En este caso:

$$
\gamma_y(t, \tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}
$$

Función de autocovarianza: Ejemplos (2/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$y_t = \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$
$$\varepsilon_t \sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

En este caso:

$$\gamma_y(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sigma^2 & \text{si } |t-\tau| = 0 \\ \frac{2}{9}\sigma^2 & \text{si } |t-\tau| = 1 \\ \frac{1}{9}\sigma^2 & \text{si } |t-\tau| = 2 \\ 0 & \text{si } |t-\tau| > 2 \end{cases}$$

Función de autocorrelación (1/2)

La **función de autocorrelación** se define como:

$$\rho(t,\tau) = \frac{\gamma_y(t,\tau)}{\sqrt{\gamma_y(t,t)\gamma_y(\tau,\tau)}}$$

donde y_t es una serie de tiempo en el momento t.

Función de autocorrelación (2/2)

Nota que la función de autocorrelación se simplifica cuando la varianza de y_t es constante. Esto es, si $\gamma_y(t,t) = \gamma_y(\tau,\tau)$, entonces:

$$\rho(t,\tau) = \frac{\gamma_y(t,\tau)}{\gamma_y(t,t)}$$

Si además $t = \tau$:

$$\rho(t,\tau) = 1$$

Función de autocorrelación: Ejemplos (1/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

En este caso:

$$\rho_y(t, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$$

Función de autocorrelación: Ejemplos (2/2)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

En este caso:

$$
\rho_y(t, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t - \tau| = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } |t - \tau| = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } |t - \tau| = 2 \\ 0 & \text{si } |t - \tau| > 2 \end{cases}
$$

Otras medidas de dependencia serial

Otras medidas de dependencia serial son:

- La **función de covarianza cruzada**:

$$\gamma_{xy}(t,\tau) = E[(x_t - \mu_{x_t})(y_\tau - \mu_{y_\tau})]$$

- La **función de correlación cruzada**:

$$\rho_{xy}(t,\tau) = \frac{\gamma_{xy}(t,\tau)}{\sqrt{\gamma_x(t,t)\gamma_y(\tau,\tau)}}$$

Estacionariedad

Estacionariedad

El concepto de **estacionariedad** (débil) es importante para modelar una serie de tiempo. Una serie y_t es estacionaria si:

1. Su media es constante:

$$\mu_{y_t} = \mu_y$$

2. Su función de autocovarianza no depende de t o τ, sino de $h = t - \tau$:

$$\gamma_y(t+k, \tau+k) = \gamma_y(t, \tau); \; k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo de estacionariedad (1/4)

Considera un ruido blanco:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Este proceso es estacionario puesto que:

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= 0 \\
\gamma_y(t, \tau) &= \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = \tau \ (h = 0) \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \ (h \neq 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ejemplo de estacionariedad (2/4)

Considera una serie de tiempo que se comporta como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Este proceso es estacionario puesto que:

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= 0 \\
\gamma_y(t, \tau) &= \begin{cases} \frac{1}{3}\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ \frac{2}{9}\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ \frac{1}{9}\sigma^2 & \text{si } |h| = 2 \\ 0 & \text{si } |h| > 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ejemplo de estacionariedad (3/4)

Considera un proceso autorregresivo de orden 1:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Este proceso es estacionario si $|\phi| < 1$, ya que:

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= 0 \\
\gamma_y(t, \tau) &= \begin{cases} \frac{\sigma^2}{1-\phi^2)}; & |h| = 0 \\ \phi \frac{\sigma^2}{1-\phi^2)}; & |h| = 1 \\ \phi^2 \frac{\sigma^2}{1-\phi^2)}; & |h| = 2 \\ \vdots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ejemplo de estacionariedad (4/4)

Considera una caminata aleatoria:

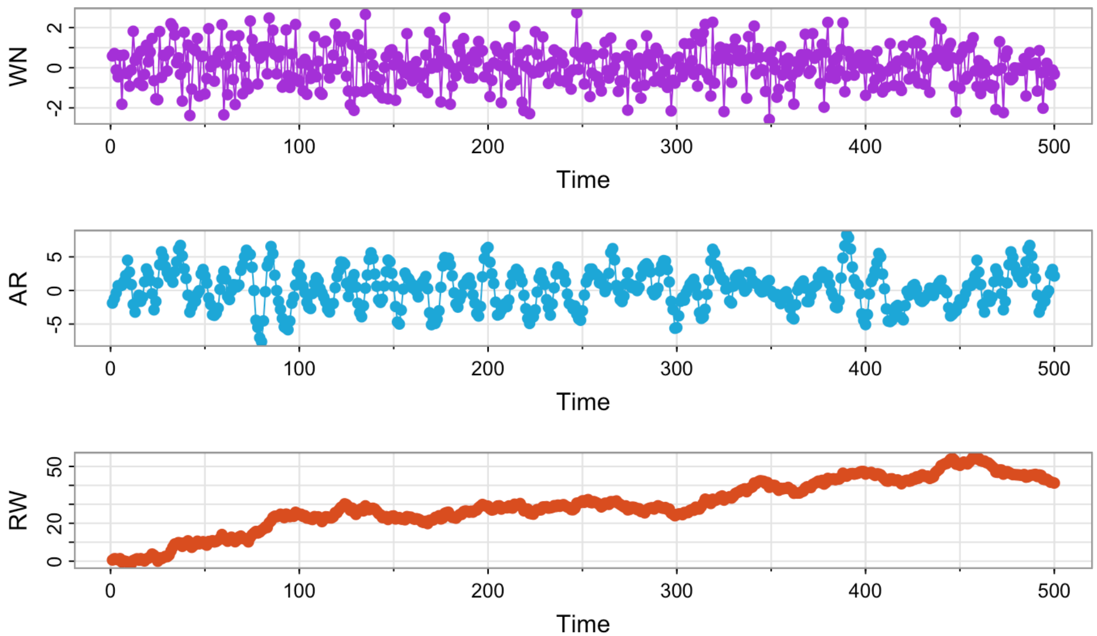
$$
\begin{aligned}
y_t &= \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t;\ y_0 = 0;\ \varepsilon_t \sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2) \\
&= \delta t + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j
\end{aligned}
$$

En este caso, ambas condiciones para la estacionariedad se violan, puesto que:

$$
\begin{aligned}
\mu_{y_t} &= \delta t \\
\gamma_y(t, \tau) &= \sigma^2 \min(t, \tau)
\end{aligned}
$$

Estacionario vs. No estacionario

¿Cuál(es) de estos procesos es (son) estacionario(s)?



Estacionariedad: Función promedio y autocovarianza

De los resultados anteriores, es fácil deducir que, para un proceso estacionario:

1. La función promedio:

$$\begin{aligned}\mu_y &= \mathbb{E}(y_t) \\ &= \mu\end{aligned}$$

2. La función de autocovarianza solo depende del desfase $h = t - \tau$:

$$\begin{aligned}\gamma_y(t, \tau) &= \gamma_y(t, t - h) \\ &= \gamma_y(h, 0) \\ &= \gamma_y(h) \\ &= \gamma_y(-h)\end{aligned}$$

Descomposición de Wold (1/2)

La siguiente es la **descomposición de Wold**:

Cualquier serie estacionaria y_t puede reescribirse como una combinación lineal de ruidos blancos:

$$
\begin{aligned}
&y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \ \ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty; \ \psi_0 = 1 \\
&\varepsilon_t \sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2).
\end{aligned}
$$

Descomposición de Wold (2/2)

Entonces, si y_t es una serie estacionaria:

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu.$$

Y:

$$\gamma_y(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}.$$

Dependencia serial: estimación

Dependencia serial: estimación (1/3)

El cálculo de las funciones promedio, autocovarianza y autocorrelación depende de nuestro conocimiento de los parámetros del modelo y del ruido blanco. En ausencia de estos, podemos usar las observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_T$ para estimar:

1. **Promedio muestral:**

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t.$$

2. **Autocovarianzas muestrales:**

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (y_t - \hat{\mu})(y_{t+h} - \hat{\mu}).$$

Dependencia serial: estimación (2/3)

3. **Autocorrelaciones muestrales:**

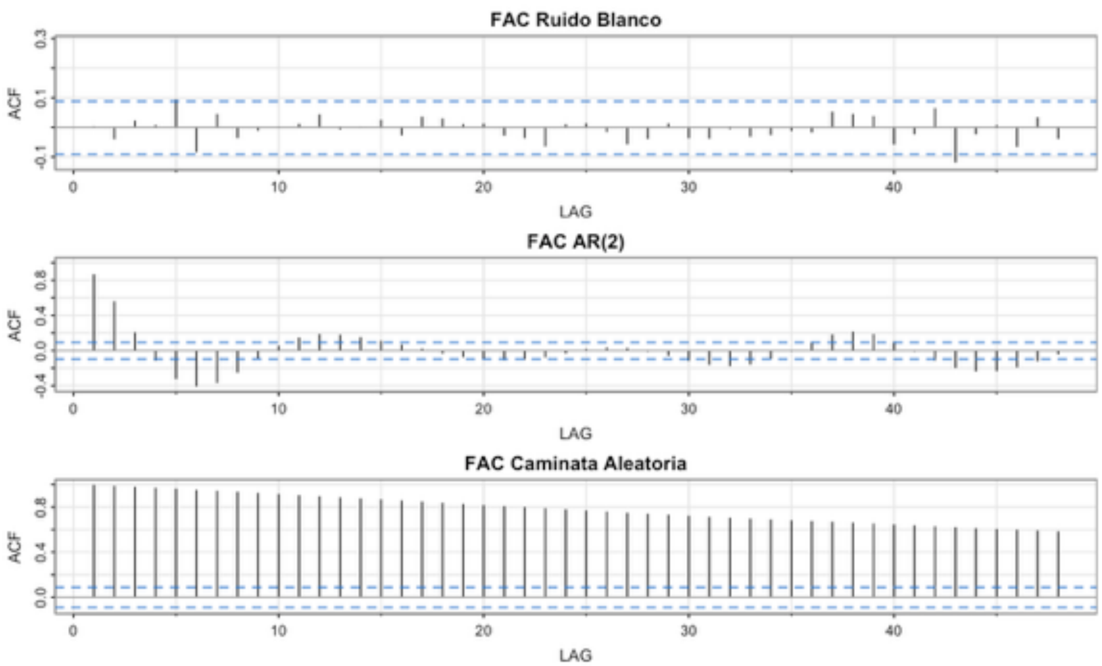
$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Se puede demostrar que si la serie y_t es un ruido blanco, entonces para T grande y bajo ciertas condiciones, la función de autocorrelación muestral se distribuye aproximadamente como:

$$\hat{\rho}(h) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{T}\right).$$

Dependencia serial: estimación (3/3)

El **correlograma** es la representación gráfica de la función de autocorrelación muestral, incluyendo intervalos de confianza.



Otras medidas de dependencia serial (1/2)

Autocovarianza y autocorrelación cruzadas:

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-h}(x_t - \hat{\mu}_x)(y_{t+h} - \hat{\mu}_y).$$

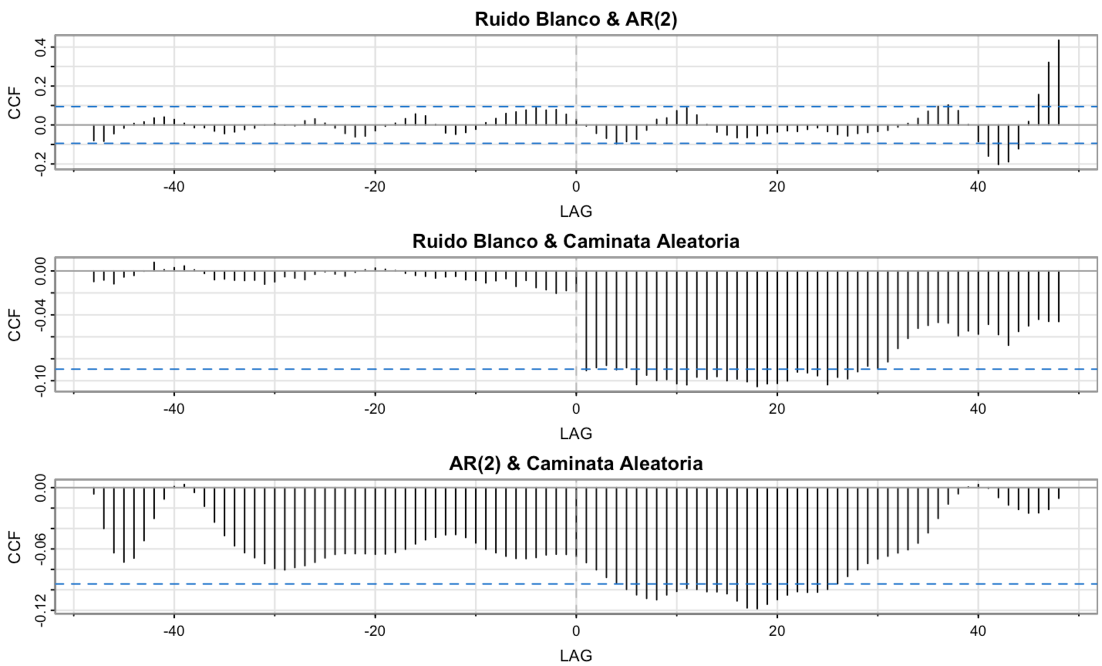
$$\hat{\rho}_{xy}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_x(0)\hat{\gamma}_y(0)}}.$$

Se puede demostrar que si las series x_t y y_t son independientes, entonces para T grande:

$$\hat{\rho}_{xy}(h) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{T}\right).$$

Otras medidas de dependencia serial (2/2)

Algunos ejemplos:



Checklist

Al terminar este capítulo, deberías ser capaz de:

- Calcular e interpretar autocovarianzas y autocorrelaciones muestrales.
- Construir e interpretar un correlograma (ACF) como herramienta descriptiva.
- Tener una primera intuición de cómo luce una serie estacionaria (media y varianza estables).